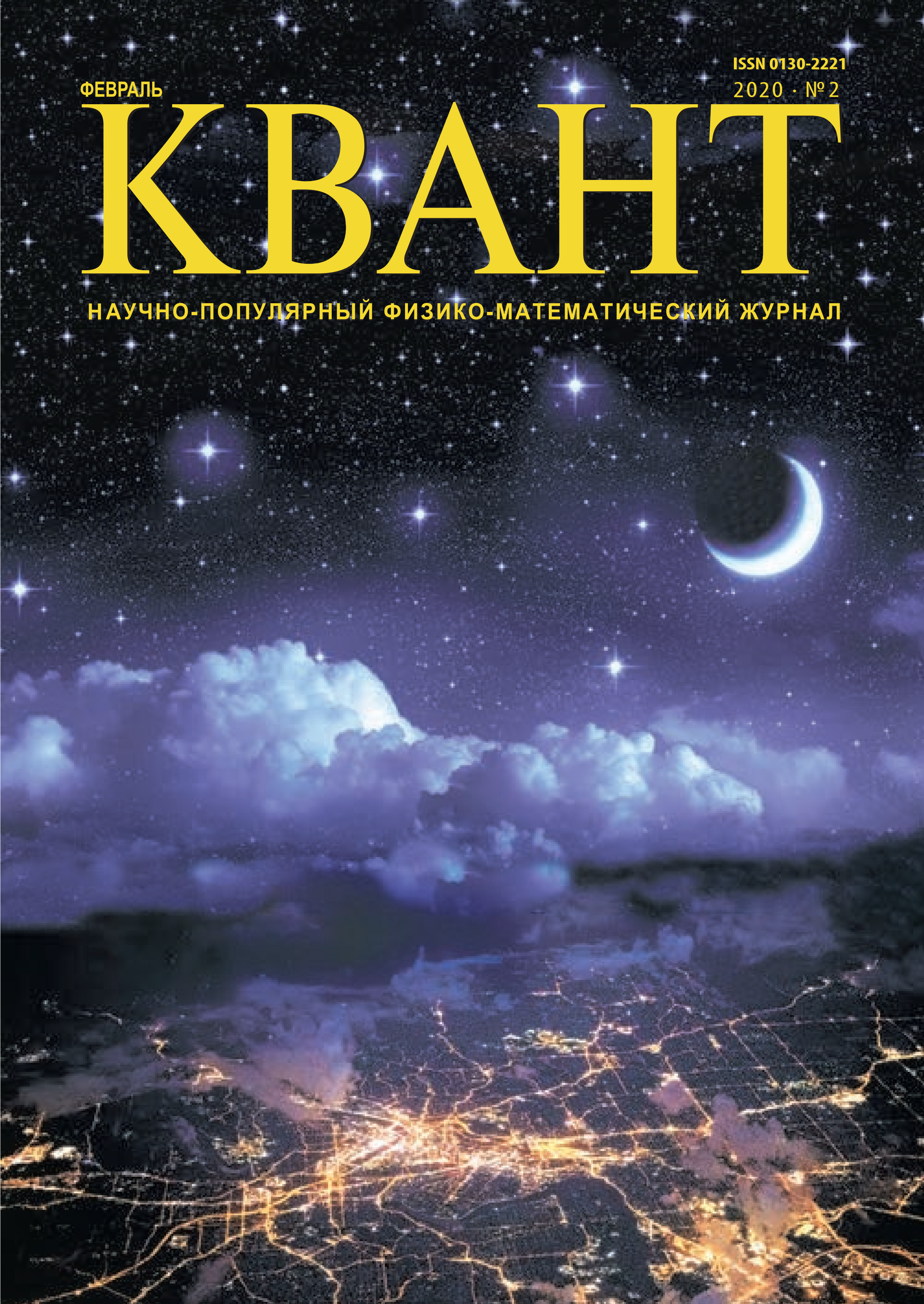
ISSN 0130-2221
ФЕВРАЛЬ
2020 · № 2

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



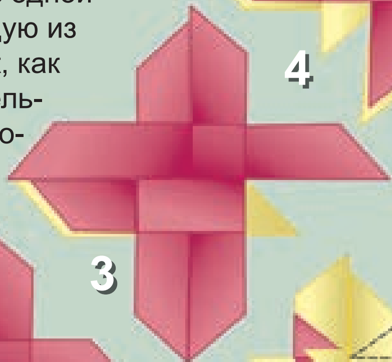
# Бумажные звездочки

Эта серия рисунков показывает, как можно изготовить красивые звездочки из бумаги. Для этого вам потребуется по четыре бумажные полоски $1\times30$ см для каждой звездочки и... немного терпения. Полоски желательно взять двухцветные (например, как здесь: красные – с одной стороны, желтые – с другой). Сложив каждую из четырех полосок пополам, зацепите их так, как показано на рисунке 1. Затем последовательно заплетите их, следуя рисункам 2–8. Изготовление «желтых уголков» (рис.3) показано отдельно внизу (рисунки *а–в*). Имейте в виду, что на картинках для экономии места длинные свободные концы полосок, образующиеся на первых шагах, срезаны. Концовка сплетения звездочки довольно хитроумна.

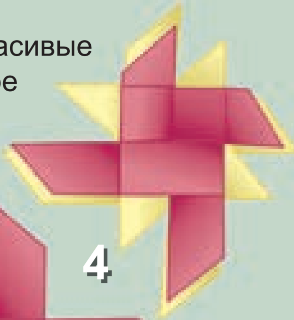
Желаем удачи!

1

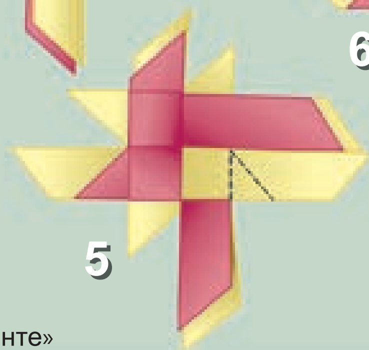
2



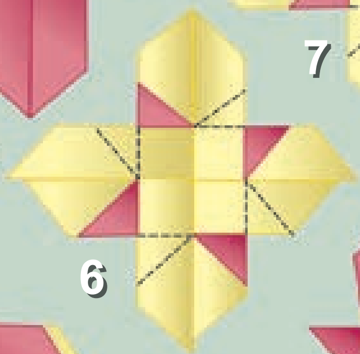
3



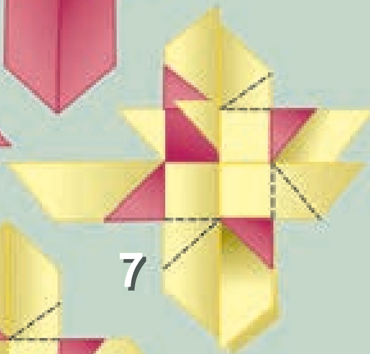
4



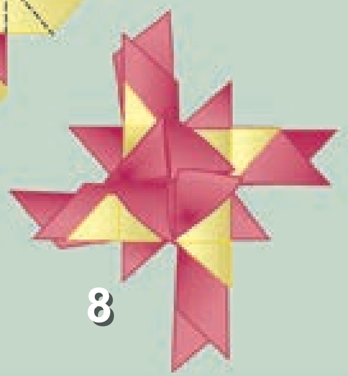
5



6

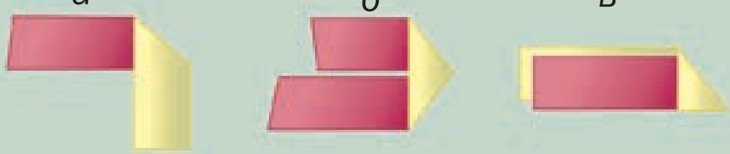


7



8

Опубликовано в «Кванте»
№12 за 1983 год.



*а* *б* *в*

# КВАНТ

ФЕВРАЛЬ 2020 №2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА


## В номере:

# Календарь и астрономия

**_Л.БЕЛОПУХОВ_**

В ТЕЧЕНИЕ БОЛЕЕ ШЕСТИДЕСЯТИ ЛЕТ судьбоносное для России событие отмечалось каждый год 7 ноября, хотя само событие носит имя не ноябрьской, а октябрьской революции. Всем известно формальное объяснение этого расхождения – разница в 13 дней между «старым» и «новым» стилями, точнее между юлианским и григорианским календарями.

Любители истории знают, что юлианский календарь назван так в честь древнеримского государственного и политического деятеля, диктатора и великого понтифика (жреца) Юлия Цезаря, а григорианский – в честь Папы Римского Григория XIII. Но на вопрос, а зачем в 1582 году понадобилось изменить календарь, применявшийся свыше полутора тысяч лет, редко можно получить вразумительный ответ. Автор (преподаватель физики в инженерном вузе) неоднократно задавал этот вопрос студентам при знакомстве с азами кинематики вращательного движения. За последние 10 лет более или менее приемлемый ответ могли дать в среднем один-два студента из ста.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200201

Причина ясна – исключение около 20 лет назад из школьного образования курса астрономии и замена его элементарными астрономическими сведениями в младших классах в предмете «Окружающий мир». Сейчас положение как будто начинает исправляться – вот уже третий год в одиннадцатом классе один урок физики заменен астрономией. Но это – капля в море.

Данная статья – попытка заинтересовать астрономией читателей «Кванта», попытка, основанная на знакомстве с проблемой календаря.

## Необходимость календаря

Календарь необходим для фиксации периодических изменений в окружающем мире. «Чувство календаря» всегда было присуще человеку, да и всему живому в природе. Прежде всего, это связано с чередованием времен года как перехода погоды от более холодной к более теплой и обратно. Оформление этого чувства в определенные понятия и слова было, по-видимому, связано с переходом человечества от собирательства и охоты, как средств добычи пищи, к земледелию и скотоводству. Необходимые для этого укрупнения племен и переход к оседлой жизни привели к бурному развитию языкового общения.

В речи появились названия для обозначения времен года и других периодических явлений в природе. Самым коротким периодом были, конечно, сутки – смена дня и ночи. А самым длинным был год – период полного цикла смены времен года. Оба эти цикла связаны с Солнцем, как источником тепла и света, поэтому оно у всех племен стало богом, без которого жизнь была бы невозможна.

Но для промежуточных циклов – самих времен года (по-нашему – кварталов) и их долей (месяцев) природа дала еще один цикл – смену фаз Луны. Сегодня мы их называем новолунием, первой четвертью, полнолунием и последней четвертью. В фазах-четвертях мы видим половину лунного диска, освещенного Солнцем. В неполных фазах Луна нам видится в виде криволинейного кругового сегмента, похожего не серп.

У многих народов для периода полной смены лунных фаз появилось слово «месяц», которое заодно означало и название самой Луны. Месяц для календаря стал удобнее, чем квартал (время года). Например, в весне можно выделить время дождей, время сева и время первой прополки, а в летнем периоде – время сенокоса, время жатвы и время созревания фруктов. Месяц удобно разделить на четыре части (совпадающие с лунными фазами), в каждой из которых по 7 суток. Вот где таится привычный нам счет дней по неделям! Такой стихийный недельно-лунный календарь принято называть просто лунным.

Но когда возникло умение считать до сотни, а потом и до тысячи, этот грубый календарь стал уточняться. Прежде всего это относилось к соотношению длительностей года и месяцев. Среди людей стали выделяться те, кто вел счет дням, месяцам и годам. Еще двести лет назад на земле уже можно было найти народы, у которых календарь велся по зарубкам на дереве или по насечкам на мягком камне (точь в точь, как это делал Робинзон на своем необитаемом острове). Возможно, что именно такие люди были жрецами и наряду со счетом времени организовывали всю духовную жизнь, предсказывали события, создавали традиции и обычаи и руководили всей хозяйственной деятельностью своего племени.

## Древние астрономические достижения

Жрецы первыми обратили внимание на неточность отношения солнечного и лунного периодов. Казалось бы, по простому счету, в году должно было быть ровно 12 лунных месяцев – 4 сезона по 3 месяца

каждый. Но оказалось, что это число очень приблизительно. Лунных месяцев в году не 12, а на одну треть месяца больше – 12,36.Это означает, что за 3 года «набегает» целый лунный месяц, а за 9 лет будет происходить сдвиг календаря на целый сезон. С этим надо было что-то делать.

Прежде всего жрецы монополизировали календарный подсчет дней и завели обычай объявлять народу о наступлении того или иного сезона и начале очередных сельскохозяйственных и иных работ. Но «для себя» им необходимо было разобраться с этим вопросом и создать правильный календарь, сохраняя его в тайне.

Выяснилось, что и отношение периода лунного цикла смены фаз к суткам является не целым числом, а равно примерно 29,5, следовательно, и длительность каждой фазы не составляет ровно 7 суток.

Вот эти нецелые отношения природных периодических процессов и есть главная причина того, что на нашей планете действовало не меньше десятка разных календарей, в которых главной задачей было согласование 12 лунных месяцев с годичным солнечным циклом. Такие календари получили название лунно-солнечных и солнечных. Но для них нужно было достаточно точно знать солнечный и лунный периоды в сутках.

Прежде всего следовало определиться с моментом начала отсчета годичного солнечного периода. Ведь никакой «службы времени» не существовало. И не было другого пути, кроме выбора определенного положения Солнца на небе, например наивысшего положения Солнца во время самого длинного дня (летнего солнцестояния). А как фиксировать положение Солнца на небе? Сегодня это не представляет труда. Подобно тому как на поверхности Земли в качестве координат используются два угла на сферической поверхности (широта и долгота), на внутренней поверхности сферы звездного неба тоже можно применять угловые сферические координаты. Для этого существуют специальные измерительные приборы. Но такие приборы еще только предстояло создать – самые древние из них были изобретены в Вавилоне и Древней Греции в пятом-четвертом веках до нашей эры. А календари уже существовали.

Аналогом угловых координат у древних звездочетов стали созвездия. Еще в глубокой древности было замечено, что ночное небо можно условно разделить на участки, в каждом из которых расположена группа звезд, образующая схематический рисунок. Этим группам (созвездиям) стали присваивать различные названия, большая часть которых была именами богов и мифологических героев, а также животных. Названия созвездий и были первыми координатами на небесной сфере. Древние греки различали 88 таких «координат».

На протяжении жизни нескольких поколений звездный рисунок выглядел неизменным – звезды казались как бы прикрепленными к небесной сфере, которая как целое вращалась вокруг земного наблюдателя, описывая полный круг за сутки. Если набраться терпения и безлунной ночью неподвижно сидеть, глядя на небо, то нетрудно определить, что за пару часов небесная сфера со звездами поворачивается на угол примерно 30°. Эту завораживающую панораму чудесно выразил наш великий поэт:

*Морозна ночь, все небо ясно,*
*Светил небесных дивный хор*
*Течет так тихо, так согласно.*

Конечно, мы знаем, что на самом деле «дивный хор» никуда не течет. Не звездная сфера вращается вокруг неподвижной Земли, а, наоборот, Земля вращается вокруг своей оси. Но тысячи лет почти все люди, глядя на небо, думали по-другому. Инакомыслящих были единицы, их заставляли молчать. Первым, кто выдвинул гелиоцентрическую систему мира и сделал ее обоснование, был выдающийся греческий математик, астроном и философ Аристарх Самосский (третий век до нашей эры). Но на него обрушились проклятия жрецов. Понадобилось почти две тысячи лет, чтобы трудами Коперника, Кеплера, Галилея и многих других астрономов геоцентрическая система уступила гелиоцентрической. Да и то не сразу. Знаменитое «а все-таки она вертится!» великий Галилей скорее всего произнес мысленно, покидая суд инквизиции с обещанием вслух так больше не говорить.

Вот почему изначально все календари исходили из геоцентрической системы мира, в которой Земля неподвижна. Да и сегодня она хороша не только как поэтический образ. Геоцентрическая система удобна для создания календарей. Именно на ней построена сферическая астрономия, которая вводит некую воображаемую сферу на огромном расстоянии от Земли, много большем, чем расстояние от Земли до Солнца. Действительно, даже ближайшая к Солнцу звезда находится от нас на расстоянии в 270000 раз большем.

### Движение Солнца в геоцентрической системе

Движение Солнца по небесной сфере в геоцентрической системе имеет непростой характер. Наблюдаются два периодических цикла движения и изменения угловых координат. Один цикл – суточный, в котором можно фиксировать максимальную высоту поднятия Солнца над горизонтом (или минимальную длину тени от вертикального столба). А другой цикл – годичный, в котором эта максимальная высота (кульминационное положение Солнца) в течение года перемещается от некоторого минимума до максимума и обратно. Если, например, на широте Москвы 22 декабря кульминация Солнца составляет угол 16,5° с плоскостью небесного экватора, то 21 марта и 22 сентября этот угол равен 40°, а 22 июня – 63,5°.

Окружность, проведенная на небесной сфере через эти точки, носит название «эклиптики» (от древнегреческого έκλείψίζ – затмение). Естественно, что время полного перемещения Солнца по эклиптике составляет год, а месячное угловое перемещение равно 30°. Оказывается, что перпендикулярная кругу эклиптики ее ось не совпадает с осью вращения Земли или, что то же самое, ось вращения Земли не перпендикулярна плоскости ее солнечной орбиты, а составляет с ней угол 23,5°. Этот угол и является причиной смены времен года. Простое следствие – на широте 23,5° в высшей кульминационной точке (в полдень 22 июня) Солнце находится прямо над головой. Напомним, что этот факт во втором веке до нашей эры был использован математиком и астрономом античности Эратосфеном для определения размера Земли.

Из наклона земной оси вытекает еще один факт. В моменты максимальной солнечной кульминации на Земле – самый длинный день, а в моменты минимальной кульминации – самый короткий. Совершенно очевидно, что существуют такие промежуточные кульминации, для которых время дня равно времени ночи. Соответствующие дни весной – 20(21) марта, осенью – 22(23) сентября. Эти дни получили название дней равноденствия (точнее было бы слово «равноночеденствие»).

А дни максимальной и минимальной кульминации назвали днями солнцестояния (летнего и зимнего). Почему они так называются? Дело в том, что скорость изменения склонения Солнца (или, другими словами, угловая скорость воображаемой линии от Земли к Солнцу) в дни равноденствий значительно больше, чем в дни солнцестояний. За 5 суток до или после равноденствия максимальное склонение Солнца изменяется на 4 градуса, что хорошо заметно на небе. А за те же 5 суток от момента солнцестояния склонение изменяется всего лишь на 2 угловые минуты. Это и создает впечатление некоторого «стояния» Солнца летом и зимой в моменты его кульминации. Убедиться в этом легко, обратив внимание на то, что длительность светового дня с точностью до одной минуты одна и та же в течение нескольких дней в районе летнего солнцестояния, а во время равноденствий день равен ночи (с точностью до минуты) не больше двух суток.

### Возникновение астрологии

Уже отмечалось, что «координатами» положения Солнца на небесной сфере в моменты его максимального подъема в древности служили созвездия. И оказалось, что на каждый месячный сдвиг положения Солнца на эклиптике (30°) приходится одно созвездие. Из 12 этих созвездий 7 имели названия животных (Овен, Телец, Рак, Лев, Скорпион, Козерог и Рыбы). Поэтому вся эклиптика получила

в античной древности название круга Зодиака (от древнегреческого ζώο – животное), а каждое из 12 созвездий стало знаком Зодиака.

Еще в глубокой древности «наблюдатели неба» заметили, что на ночном небе некоторые объекты ведут себя не так, как все многочисленные остальные светила, остающиеся на своих местах. Эти объекты перемещались, месяц от месяца попадая в разные созвездия, причем перемещения эти были очень непростыми, иногда даже с возвратным движением. Все они получили имена богов, мы знаем их в латинском звучании – Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн. В божественности Луны и Солнца, тоже перемещавшихся по небу, с древнейших времен сомнений не было. Все эти 7 перемещающихся объектов греки так и назвали «блуждающими» (πλανητηζ по-гречески).

Факт перемещения Солнца по кругу Зодиака в сочетании с изменяющимся положением планет на звездной сфере легли в основу астрологии ( от греческих αζτρον – звезда и λώγζ – мысль, слово). Астрологи постулировали, что на судьбу людей, начиная с момента рождения, влияют положения Солнца и планет на небесной сфере. А эти положения можно предсказывать. Появились астрологические прогнозы.

Может возникнуть вопрос: как же древние астрологи определяли зодиакальные созвездия, в которых находилось Солнце в момент его суточной кульминации? Ведь днем звезд не видно, особенно вблизи Солнца. Но оказывается, что днем со дна глубокого и узкого колодца прекрасно видны звезды и созвездия. Нужно только было иметь такие колодцы, прорытые под разными углами к земной поверхности. А когда были изобретены первые угловые измерительные инструменты, колодцы стали ненужными. Ночью можно было определить то созвездие, которое находилось на небе под углом, измеренным днем для положения Солнца в момент его наивысшего подъема.

Сначала эти измерения проводились во время летнего солнцестояния (максимальный угол подъема Солнца и минимальная

скорость его перемещения по эклиптике), что и определяло начальное положение Солнца на зодиакальном круге. Но усовершенствование измерительных инструментов греческими астрологами (их в Греции стали чаще называть астрономами) позволило проводить точные измерения и в дни весеннего равноденствия. Это произошло свыше 2000 лет назад, когда Солнце наблюдалось в созвездии Овена, и было сделано во втором веке до нашей эры греческим астрономом, математиком и механиком Гиппархом. И именно тогда был создан тот астрологический канон, которым пользуются и современные астрологи.

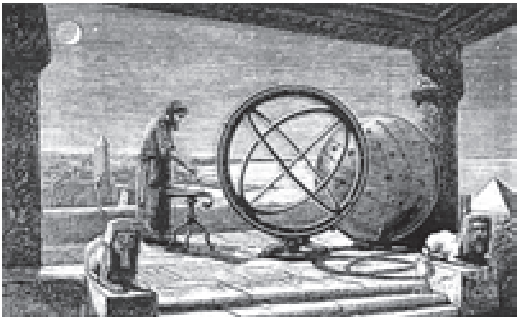
Но затем Гиппарх на основе своих точных измерений пришел к неожиданному выводу, что на небесной сфере точка кульминации Солнца в день весеннего равноденствия медленно перемещается вдоль эклиптики. Скорость этого перемещения невелика. На один градус дуги эта точка перемещается за 72 года. Но за 1000 лет астрологических измерений до Гиппарха перемещение составило уже 14 градусов. А за 26000 лет оно составит на небесной сфере уже полный круг в 360°. Гиппарх назвал это явление предварением равноденствий (позднее появилось латинское слово precessia, в буквальном переводе – предшествование).

### Ошибки астрологов и их гороскопов

Открытие Гиппархом предварения равноденствий означает, что даты равноденствий и, соответственно, положение Солнца на эклиптике относительно созвездий тоже должны изменяться — примерно на одно созвездие за 2000 лет. При этом должна меняться и длительность пребывания Солнца на «участке» того или иного созвездия. Во время Гиппарха эта длительность колебалась в пределах 28–30 дней, что и зафиксировано в астрологическом каноне, которым пользуются до сих пор. Но в наше время это совершенно другая длительность, она сейчас колеблется в пределах от 8 до 44 дней.

Мало того, на современной картине звездного неба солнечная эклиптика пересекает уже не 12, а 13 созвездий. В число знаков Зодиака теперь входит и созвездие Змееносца (с 30 ноября по 18 декабря). И даты рождения современных людей соответствуют совсем другим (соседним) знакам Зодиака.

Из этих неопровержимых астрономических данных следует, что все астрологические прогнозы (гороскопы) о судьбах людей, определяемые по старинному, двухтысячелетней давности, канону, сейчас бессмысленны, а если и бывают совпадения, то они чисто вероятностные. Но ведь известно, что выдающиеся астрономы эпохи Возрождения и Нового времени тоже составляли астрологические прогнозы. И это было для них единственным источником средств для жизни, а главное, для приобретения необходимых приборов и инструментов. Властные и богатые люди щедро платили за гороскопы, особенно если они сбывались. Например, предшественнику Кеплера датскому астроному Тихо Браге король Дании Фридрих II подарил целый остров и построил для него замок Ураниенбург, оснащенный самыми



лучшими приборами для изучения неба (Урания – муза астрономии). Иоганну Кеплеру приписывают такие слова: «Астрология – дочь астрономии. Естественно, что дочь должна кормить мать, которая без нее умерла бы с голоду». Но множество астрологов ничего не сделали полезного в астрономии, а попросту занимались прибыльным делом.

### Причина предварения равноденствий

Гиппарх догадывался, что открытое им явление предварения равноденствий связано с вращением Земли вокруг своей оси, в чем он был уверен, как и его предшественник Аристарх Самосский. Какова же связь вращения Земли с этим явлением, которое в римское время стали называть прецессией?

Заметим, что XVIII веке ученые назвали этим словом другое явление, характеризующее вращение массивных тел, имеющих в данной системе отсчета одну неподвижную точку, – гироскопов (волчков). Это явление знакомо каждому с детства. При наклоне игрушечного волчка (юлы) ось вращения начинает описывать коническую поверхность. Это придает устойчивость положению волчка, потому что среднее положение вектора оси остается вертикальным. Вращательное движение оси волчка есть следствие закона динамики вращательного движения твердого тела. На обычный волчок действует момент силы тяжести, приложенной к центру масс волчка. Вектор этого момента все время остается перпендикулярным оси вращения, что и вызывает поворот этой оси. А постоянный поворот оси и означает ее вращение (прецессию). Угловая скорость прецессии всегда значительно меньше угловой скорости самого волчка.

Астрономы применили законы прецессии гироскопа к вращающейся Земле. Для земного шара вращающим моментом может быть только суммарный момент сил тяготения между Землей и массивными телами солнечной системы – самим Солнцем, Луной и планетами Солнечной системы. Если бы Земля имела форму идеального однородного шара, то момент этих сил был бы равен нулю, потому что все эти силы можно было бы считать приложенными к ее центру. Но Земля не шар и не абсолютно твердое идеально однородное тело. Вращение Земли приводит к сплюснутости у полюсов, ее экваториальный радиус на 20 километров больше полярного. Эта причина и неоднородность земного вещества приводят к неравенству нулю суммарного момента сил тяготения со стороны объектов Солнечной системы. Он и вызывает прецессию земной оси. Так называемые «полюсы мира», проекции земной оси на небесную сферу, перемещаются по ней, описывая окружности с угловым раствором дважды по $23{,}5°$. В гелиоцентрической системе, где неподвижно Солнце, это соответствует углу между осью вращения Земли и плоскостью земной орбиты. Выше уже отмечалось, что это и есть причина смены времен года.

Ось вращения медленно, но верно поворачивается, угловая скорость этого поворота соответствует периоду вращения 26000 лет. И времена года должны так же медленно перемещаться по годичному календарю – примерно на месяц за каждые 2200 лет. И соответственно этому для каждой местности на Земле (ее географической широты) будет меняться кульминационная суточная высота Солнца над горизонтом и среднегодичное значение этой высоты, т.е. будет меняться климат. Возможно, что это и есть причина периодического появления и исчезновения так называемых малых ледниковых периодов в умеренных широтах (другая возможная причина – долгопериодные изменения солнечной активности).

Совершенно очевидно, что прецессия земной оси должна находить какое-то отражение в календарных системах, прежде всего в таких, которые связаны со звездным небом, например в астрологическом календаре. В других календарях она вносит небольшую поправку и никогда не учитывалась вплоть до современного, григорианского календаря. В этом календаре используется так называемый истинный или тропический год, длительность которого определяется как промежуток времени между двумя последовательными прохождениями центра диска Солнца через точку весеннего равноденствия. Тем самым, влияние прецессии земной оси при этом уже учтено автоматически. И проблемой разработки солнечных календарей становится согласование длительности тропического года с длительностью суток. Длительность тропического года в современную эпоху составляет 365, 2422 суток. И эта «добавка» 0,2422 должна быть близкой к некоторому рациональному числу – отношению целых чисел.

В статье В.Г.Сурдина «Високосное летосчисление» в сборнике «Математическая составляющая» (М.: Фонд «Математические этюды») рассматривается общий принцип построения календарей на основе математического аппарата под названием «цепные дроби». Вычисленные с помощью этого аппарата рациональные добавки составляют (в сутках) 1/4, 7/29, 8/33, 31/128... Это означает, что к 365 суткам в календарном году должны добавляться 1 сутки раз в 4 года, 7 суток – раз в 29 лет, 8 суток – раз в 33 года, 31 сутки – раз в 128 лет и т.д. Среднегодовая погрешность при этом будет все меньше и меньше – 11,25 минуты для дроби 1/4, 70 секунд для дроби 7/29, 20 секунд для дроби 8/33 и чуть меньше 1 секунды для дроби 31/128.

Читатель уже сразу замечает, что вариант с 1/4 – это и есть юлианский календарь с его «високосной» добавкой 29 февраля 1 раз в 4 года. А что же такое нынешний григорианский календарь с этой математической (арифметической) точки зрения? Ответ на этот вопрос – во второй части статьи.

*(Продолжение следует)*

# О стихотворных размерах

**Д.ФУКС**

Общеизвестно, что большинство русских стихов подчиняется силлабо-тоническому строю. Грубо говоря, это означает, что в каждой строке стихотворения между соседними ударными слогами располагается одно и то же (фиксированное для данного стихотворения) число безударных слогов и первое ударение приходится на один и тот же по порядку слог. Например, в стихах, написанных наиболее распространенным в русской поэзии размером – ямбом, все четные слоги каждой строки должны быть ударны, а нечетные – безударны:

*Люблю́ тебя́, Петра́ творе́нье...*

Легко заметить, однако, что сформулированное правило нуждается в уточнениях. Попробуем, например, с его помощью расставить ударения в эталонных строках русского ямба:

*Мой дя́дя са́мых че́стных пра́вил,*
*Когда́ не в шу́тку за́немо́г...*

Мы наблюдаем сбои в обе стороны: слова *мой* и *не* вовсе не получили ударений, а в слове *занемог* их оказалось два. Если мы продвинемся в чтении «Евгения Онегина» (или «Медного всадника») дальше, то мы увидим, что эти отклонения от правила все же не вполне произвольны. Имеется в действительности только одно ограничение. Чтобы его сформулировать, занумеруем в каждой строке слоги по порядку. Тогда если один или более слогов некоторого слова получат четные номера, то среди этих слогов должен присутствовать ударный слог этого слова. Высказывание «стихотворение написано ямбом» в точности означает, что выполнено это условие. Убедитесь в качестве упражнения, что «Евгений Онегин» написан ямбом, а «Василий Теркин» – нет. (Усердный читатель, который продвинется в исследовании «Евгения Онегина» достаточно далеко, возможно, будет обескуражен его 26-й строкой. Он найдет разъяснение в следующем пункте, правда, написанное мелким шрифтом.)

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1988 год.

**Определение размера.** Мы постулируем, что рассматриваемый текст (стихи) разбит на *строки*, строки разбиты на *слова*, состоящие из *слогов* (слова типа «в» или «к» мы игнорируем). Слоги в каждой строке занумерованы подряд, начиная с первого. Один из слогов каждого слова является *ударным* (это тот слог, на который падает ударение при обычном чтении слова).

Как нередко случается с аксиомами, это утверждение лишь приближенно отражает действительность. Во-первых, бывают слова с двумя (и более?) ударениями: *самогоноварение*, *двоякопериодический* и т.п. Однако, это – длинные, неуклюжие слова, которые редко встречаются в стихах. Во-вторых, в некоторых словах, таких как *или*, *через*, *перед* и т.п., ударение может переместиться на другой слог. Это часто происходит в стихах, примером может служить упоминавшаяся 26-я строка из «Евгения Онегина» – *Или блистали, мой читатель*; вспомните еще *Через леса, через моря колдун несет богатыря*. Такой перенос ударения возможен и в разговорной речи – скажите: «Течет река, через нее переброшен мост», и вы услышите, что в слове *через* ударение падает на второй слог. В-третьих, наконец, некоторые группы слов, например «на́ дом» в фразе «Задание на дом», образуют так называемые ритмические группы, которые следует приравнивать к словам. Мы игнорируем здесь все эти аномалии, вводя следующее золотое правило: все формулируемые ниже правила имеют исключения, нужно только чтобы число этих исключений было мало.

Зафиксируем два натуральных числа $n$ и $k \le n$ и отметим в каждой строке слоги с номерами $k$, $k+n$, $k+2n$, …; эти слоги по определению считаются *сильными слогами $(n,k)$-размера*. Говорят, что строка *подчиняется $(n,k)$-размеру*, если выполнено следующее условие[1] :

> Если некоторое слово содержит хотя бы один сильный слог $(n,k)$-размера, то и его ударный слог является сильным слогом $(n,k)$-размера. Другими словами: если ударный слог некоторого слова не является сильным, то это слово вообще не содержит сильных слогов.

Например, обсуждавшийся выше ямб – это $(2,2)$-размер.

*Стихотворение подчиняется $(n,k)$-размеру*, если каждая его строка подчиняется $(n,k)$-размеру. При чтении стихотворения сильные слоги выделяются более или менее отчетливыми ударениями. Но еще раз подчеркнем: не следует путать, и тем более отождествлять, *сильные* и *ударные* слоги. Сильный слог не обязан быть ударным (первый слог слова *занемог* из второй строки «Евгения Онегина»), а ударный – сильным (слово *не* в той же строке). Помещенное в рамку правило как раз и указывает, когда сильный слог обязан быть ударным, т.е. когда на слог с определенным номером в строке действительно падает ударение при правильном чтении.

Подробнее $(n, k)$-размер называется *$n$-сложным размером с $k$-й сильной долей*.

**Упражнение 1.** а) Докажите, что если в строке, подчиненной $(n,k)$-размеру, сильный слог принадлежит слову, содержащему не больше $n$ слогов, то этот слог является ударным. б) Если в строке отсутствуют слова, содержащие больше $n$ слогов, то условие подчиненности этой строки $(n,k)$-размеру равносильно тому, что все сильные слоги – ударны.

Заметим, что наша терминология не вполне согласуется с принятой в стиховедении. В частности, то, что мы называем размером, чаще называют *метром*, а размер включает в себя еще и число сильных слогов в строке, или, как говорят, число стоп. Например, ямб – это метр, а пятистопный ямб – это размер.

**Классические размеры.** *Классическими размерами* русской поэзии по определению считаются двухсложные и трехсложные размеры. Таким образом, классических размеров пять. Вот их названия:

| Размер | Название | Перевод названия (с греческого) |
|---|---|---|
| (2,1) | Хорей | Плясовой |
| (2,2) | Ямб | ? |
| (3,1) | Дактиль | Палец[1] |
| (3,2) | Амфибрахий | Двоякократкий[2] |
| (3,3) | Анапест | Обратный[3] |

Примеры трех из пяти классических размеров мы находим в хрестоматийных стихах Пушкина.

Ямб:

*Я помню чудное мгновенье…*
*Еще одно последнее сказанье…*
*Унылая пора, очей очарованье…*

Хорей:

*Буря мглою небо кроет…*
*Царь с царицею простился…*
*Долго ль мне гулять на свете…*

Амфибрахий:

*Сижу за решеткой в темнице сырой…*
*Кавказ подо мною. Один в вышине…*
*Как ныне сбирается вещий Олег…*

С дактилем нам поможет Лермонтов:

*Тучки небесные, вечные странники…*

А у Некрасова мы с легкостью находим образцы всех трехсложных размеров.

Дактиль:

*В мире есть царь,*
*этот царь беспощаден…*
*Дня не проводит Мазай без охоты…*

---

[1] Это условие стиховеды часто называют *правилом запрета переакцентуации*. Оно впервые было четко высказано известным лингвистом Р.Якобсоном в двадцатых годах, а затем изучено и развито в стиховедческих работах А.Н.Колмогорова и его учеников.

[2] Палец имеет три фаланги: первая длинная, две другие короткие.

[3] Сильную долю окружают две слабые («краткие») доли.

[4] Обратный дактилю.

Амфибрахий:

*Савраска увяз в половине сугроба...*
*Есть женщины в русских селеньях...*

Анапест:

*Выдь на Волгу, чей стон раздается...*
*Что ты жадно глядишь на дорогу...*

**Какой размер лучше?** Если вы спросите у приятеля: «Ты подписался на журнал «Квант»?», то, скорее всего, вы сделаете ударения на словах «подписался» и «Квант», оставив безударными слова «ты», «на» и «журнал». Итого, 2 ударения на 9 слогов. Я думаю, это норма для разговорной речи: одно ударение на 4–5 слогов. Если вы отвечаете урок или читаете речь по бумажке, ударений будет больше (это явление описывается словом «бубнить»). Когда вы читаете «с выражением» стихи, ударений будет еще больше: *примерно треть всех слогов будут ударными*. Это обстоятельство побудило некоторых критиков второй половины прошлого века сделать вывод, что наиболее подходящими для русского стихосложения размерами являются трехсложные размеры.

Действительно, трехсложные размеры занимают значительное место в творчестве поэтов указанного времени, прежде всего Некрасова и его окружения. Но верно и другое. Пушкин почти не пользовался трехсложными размерами: 80% его стихов написаны ямбом, 15% – хореем, а трехсложными размерами – совсем немного, причем это по большей части пародии, эпиграммы и т.п. (Справедливости ради нужно сказать, что среди немногих стихов Пушкина, написанных трехсложным размером, есть весьма известные; кроме упомянутых выше можно назвать *Раздайтесь, вакхальны напевы..., Смотрю, как безумный, на черную шаль...* и некоторые другие. Кстати, среди трехсложных размеров Пушкин явное предпочтение отдавал амфибрахию; чем объяснить это, я не знаю.) Двухсложными размерами написаны многие стихи Лермонтова и почти все стихи Тютчева. Предпочтение двухсложным размерам (а среди них – ямбу) отдавали такие современные Некрасову поэты, как Фет и Майков, не говоря уже о более поздних поэтах. Попробуем разобраться, в чем причина этого.

**Двухсложный размер против трехсложного.** Если мы прочтем стихотворение, написанное ямбом или хореем, и сделаем ударения на всех сильных слогах, то получится считалка. Например:

*Вы́шел ме́сяц из тума́на,*
*Вы́нул но́жик и́з карма́на...*

Чтобы привести количество ударений к норме, относительно которой мы выше согласились (одно ударение на 3 слога), мы должны пропустить – или приглушить – ударения на части сильных слогов. Это придает двухсложным стихам много замечательных качеств. Первое из них – разнообразие. В зависимости от того, какие именно сильные слоги выделяются ударениями, стихотворная строка может звучать совершенно по-разному. Сравните, например:

*Под насыпью, во рву некошенном...*

(Блок)

*Тебе ль меня придется хоронить...*

(Шекспир в переводе Маршака)

Трудно поверить, что размеры этих строк одинаковы, но это так! Более того, одно и то же стихотворение, написанное ямбом или хореем, может звучать в ритмическом отношении совершенно по-разному у разных исполнителей. Второе качество – близость к разговорной речи. Возможность не барабанить с одинаковой силой все сильные слоги позволяет приглушить ритм стиха, тем самым приблизив его к прозе самого высокого качества. Лично я не могу себе представить, как «роман в стихах» мог бы быть написан трехсложным размером. Наконец, третье – выделение части сильных слогов в двухсложном размере само может подчиняться какому-нибудь арифметическому правилу, создавая дополнительный ритм. Например, если в стихотворении, подчиненном двухсложному размеру, приглушить все четные сильные слоги и выделить нечетные (или наоборот), то размер стихотворения станет четырехсложным! Но об этом мы поговорим потом.

**Контрдоводы трехсложного размера.** Мы уже говорили, что, читая стихи, написанные трехсложным размером, мы принуждены более или менее равномерно выделить ударениями все сильные слоги. В результате оказывается, что стихи, написанные одинаковыми по числу слогов одноименными трехсложными размерами, очень похожи друг на друга. Сравните, например:

*Ты твердишь, что я холоден,*
*замкнут и сух,*
*Да, таким я и буду с тобой:*
*Не для ласковых слов я выковывал дух,*
*Не для дружб я боролся с судьбой...*

(Блок)

*Мне на шею бросается век-волкодав,*
*Но не волк я по крови своей.*
*Запихай меня лучше, как шапку, в рукав*
*Жаркой шубы сибирских степей...*

(Мандельштам)

Авторам стихов, написанных трехсложным размером, приходится мириться с его однообразием, которое, впрочем, придает стихам некоторую торжественность («Вакхическая песнь» Пушкина), а в других случаях роднит стихотворение с задушевной русской песней (вспомните *Когда я на почте служил ямщиком* и *Славное море, священный Байкал*, и *Бродяга к Байкалу подходит*, и даже *Наверх вы, товарищи, все по местам*, и даже *Вы жертвою пали в борьбе роковой*!).

Но нет ли способа побороть тягучее однообразие трехсложного размера? Такой способ есть, и он очень стар: нужно не следовать трехсложному размеру строго, а систематически нарушать его ритм. Примером такого видоизмененного трехсложного размера может служить гекзаметр – едва ли не самый древний из стихотворных размеров. Образцом гекзаметра может служить лицейская эпиграмма Пушкина:

*Внук Тредьяковского Клит*
*гекзаметром песенки пишет...*

Сильными слогами гекзаметра являются 1-й, 4-й, 7-й, 9-й, 12-й и 15-й слоги; таким образом, гекзаметр представляет собой смесь дактиля и анапеста. А вот интересный пример из Лермонтова:

*Они любили друг друга*
*так долго и нежно,*
*С тоской глубокой и страстью*
*безумно-мятежной!*
*Но, как враги, избегали признанья*
*и встречи,*
*И были пусты и хладны*
*их краткие речи.*

Это – дактиль, но без ударения на 1-м слоге. Согласитесь, что размер этого стихотворения не назовешь однообразным или скучным. Сходный размер встречается у Фета:

*Измучен жизнью, коварством надежды,*
*Когда им в битве душой уступаю,*
*И днем, и ночью смежаю я вежды*
*И как-то странно порой прозреваю.*

У более поздних поэтов так или иначе модифицированный трехсложный размер встречается очень часто. Я ограничусь одним примером из Гумилева:

*Уронила девушка перстень*
*В колодец, колодец ночной.*
*Простирает легкие персты*
*К холодной воде ключевой.*
*Возврати мне перстень, колодец,*
*В нем красный цейлонский рубин...*

В этом стихотворении четные строки написаны амфибрахием, а нечетные – модифицированным амфибрахием: ударение со 2-го слога перенесено на 3-й.

**Неклассические размеры.** В нашем определении $(n,k)$-размера $n$ может быть любым натуральным числом (хотя естественно брать его не слишком большим, скажем, чтобы в строке было не меньше двух сильных слогов). Что можно сказать о $(n,k)$-размере с $n \neq 2$ и 3?

Начнем с $n = 1$. Очевидно, любой текст подчиняется $(1,1)$-размеру: все слоги сильные. Читать такие стихи – значит, скандировать (шай-бу-шай-бу!). Стихи в этом роде существуют, например: *Не-ест-не-пьет-мень-шой-сы-нок* (Некрасов), *Ко-си-ко-са-по-ка-ро-са* (Твардовский). Но они редки.

Более интересны размеры с $n > 3$, особенно с $n = 4$ и 5.

**Совмещение размеров.** Прежде чем обратиться к ним, зададимся вопросом: может ли одна и та же строка подчиняться двум разным размерам? Наше определение не исключает такую возможность. Например, строчка, составленная из одних односложных слов, подчинялась бы любому размеру.

**Упражнение 2.** а) Докажите, что строчка, подчиненная одновременно ямбу и хорею, состоит из односложных слов. б) Докажите, что строчка из 9 слогов, подчиненная двум разным трехсложным размерам, содержит по крайней мере 6 слов.

Практически это означает, что разные двухсложные размеры, как и разные трехсложные размеры, совместить невозможно. Казалось бы, совместить двухсложный размер с трехсложным легче, хотя и при этом возникают серьезные ограничения на длину слов.

**Упражнение 3.** Докажите, что если строчка подчиняется одновременно хорею и дактилю, то 4-й слог входит в состав либо односложного слова, либо слова, состоящего по крайней мере из 4-х слогов.

Набоков приводит пример строки, подчиненной ямбу и амфибрахию: *Таинственный и неземной*. Но строка – это еще не стихотворение. К тому же сильные слоги двухсложного и трехсложного размеров, совмещенных в одном стихотворении, были бы совершенно различны, и это стихотворение (если бы оно существовало) можно было бы прочесть двумя совершенно разными способами. Можно высказать уверенность, что ни в одном поэтическом сборнике вы такого стихотворения не найдете.

Другое дело – совмещение двухсложного и четырехсложного размеров, и причина в том, что 4 делится на 2. Например, что нужно для того, чтобы строка, подчиненная ямбу, подчинялась также, скажем, (4,2)-размеру? Нужно, чтобы в слове, содержащем более одного четного слога, ударение приходилось на слог, номер которого не делится на 4. Выбросьте последнее «не», и вы получите условие подчиненности ямба (4,4)-размеру. Поскольку слов, содержащих несколько четных слогов, в стихотворении может быть не так уж много, это условие представляется вполне выполнимым. Для примера заметим, что из 14 строк первой строфы «Евгения Онегина» 13 подчиняются (4,4)-размеру и 7 подчиняются (4,2)-размеру. Наоборот, что нужно для того, чтобы строка, подчиненная (4,2)-размеру, подчинялась ямбу? Нужно, чтобы в словах, не содержащих сильных слогов (4,2)-размера, но содержащих (тогда уж единственный) четный слог, этот слог был ударным. (Например, если 3-й и 4-й слоги такой строки составляют слово, то в этом слове ударение должно падать на 4-й, а не на 3-й слог.) И это представляется вполне выполнимым.

**Четырехсложные размеры.** Теперь мы можем обратиться к их рассмотрению. Каждому четырехсложному размеру мы поставим в соответствие сопряженный с ним двухсложный размер: для (4,1)- и (4,3)-размера таковым, по определению, считается хорей, для (4,2)- и (4,4)-размера – ямб. Далее, если строка подчиняется четырехсложному размеру, мы будем говорить о ее размере как о *несамостоятельном* четырехсложном, если она подчиняется также сопряженному двухсложному размеру, и как о *самостоятельном* – в противном случае.

Начнем с самостоятельного четырехсложного размера. Должен признаться, что *убедительных примеров русских стихов, подчиненных самостоятельному четырехсложному размеру, мне не известно.* Вероятно, их и нет – к такому выводу можно прийти, читая статью стиховеда Л.Е.Ляпиной «Русские пеоны» в уже цитировавшемся сборнике «Русское стихосложение». (*Пеоны* – ученое название четырехсложных размеров; а пятисложные по-ученому называются *пентонами*.) Отчего это так? В поисках ответа попробуем сконструировать строчку, подчиненную самостоятельному четырехсложному размеру:

*Написал сорок статей я в журнал «Квант».*

Эта строчка подчиняется (4,3)-размеру, но не подчиняется хорею. Ее чтение вызывает явное затруднение: ударения в словах *сорок* и *журнал* кажутся стоящими не на месте. В чем дело? Вероятно, в том, что, как уже было сказано, примерно треть слогов в стихотворении должны быть ударными; поэтому сильных слогов не достаточно, и к ним приходится добавлять хотя бы слабые дополнительные ударения. По ритмическим соображениям эти ударения хочется расположить в середине интервала между сильными слогами, а это и значит, что четырехсложный размер стремится к несамостоятельности.

Несамостоятельный же четырехсложный размер – очень распространенное явление. Если вы сомневаетесь в его существовании (как сомневались некоторые стиховеды – полемика с ними составляет основное содержание цитировавшейся выше статьи Л.Е.Ляпиной), спросите у любого ученика музыкальной школы – и он скажет вам, что четырехдольный размер в музыке встречается очень часто, в частности в песнях:

*Я ли в поле да не травушка была…*
*Уж как я ль мою коровушку люблю…*

(все это – несамостоятельный (4,3)-размер, он, как и трехдольный, весьма характерен для русской песни). Если и это вас не убеждает, полистайте Пушкина. Вот образец (4,2)-размера из его юношеских стихов:

*В пещéрах Геликóна*
*Я нéкогда рождéн;*
*Во ѝмя Аполлóна*
*Тибýллом окрещéн…*

Знаменитая «Зимняя дорога» Пушкина (*По дороге зимней, скучной…*) мне тоже кажется написанной четырехсложным размером; однако композитор Свиридов предпочел прочесть эти стихи как двухсложные.

Более того, часто (можно сказать, как правило) четырехсложному размеру бывает подчинена только часть стихотворения, и переходы от четырехсложного ритма к двухсложному и обратно могут нести смысловую или изобразительную нагрузку. Это легко прослеживается, например, в поэме Некрасова «Кому на Руси жить хорошо» (несамостоятельный (4,2)-размер).

**Пятисложные размеры.** Поскольку 5 – простое число, пятисложный размер может быть только самостоятельным. Где искать его? Казалось бы, в стихах еще более тягучих и распевных, чем русские песни и лирика Некрасова. Может быть, подойдут народные сказания? И точно, многие строки этого рода подчинены пятисложному размеру:

*Ох ты гóй еси, добрый мóлодец…*

или

*То не мýж с женой, то не брáт с сестрой –*
*Добрый мóлодец с красной дéвицей.*

Более последовательный пятисложный размер (хотя тоже не без отступлений) можно найти в подделках под сказительный стиль, в стилизациях, написанных профессиональными поэтами, скажем в «Купце Калашникове» Лермонтова:

*Как сходѝлися, собирáлися*
*Удалы́е бойцы москóвские*
*На Москвý-реку, на кулáчный бой…*
*И приéхал царь со дружѝною.*
*Со боя́рами и опрѝчниками…*

Все это, кстати, (5,3)-размер.

Казалось бы, все ясно. Но позволю себе привести совсем другой пример. В последний год своей жизни Гумилев написал поэму «Дракон», состоящую из 12 частей по 5 четверостиший в каждой. Приведу полностью первую часть, описывающую восход солнца на океанском берегу, а вы определите размер.

*Из-за свежих волн океана*
*Красный бык приподнял рога.*
*И бежали лани тумана*
*Под скалистые берега.*

*Под скалистыми берегами,*
*В многошумной сырой тени*
*Серебристыми жемчугами*
*Оседали на мох они.*

*Красный бык изменяет лица,*
*Вот широко крылья простер,*
*И парит огромная птица,*
*Пожирающая простор.*

*И к вратам голубой кумирни*
*По открытой тропе небес*
*Он выходит, стрелок и лирник,*
*Ключ держа от тайн и чудес.*

*Дуйте ветры, чтоб волны пели,*
*Чтоб в лесах гудели стволы,*

*Дуйте ветры в трубах ущелий,*
*Возглашая ему хвалы.*

Ответ: (5,3)-размер.

Действительно, предположим, что данное стихотворение подчиняется $(n,k)$-размеру. Во всех 20 строчках 3-й и 8-й слоги являются ударными (в своих словах). Имеется 7 строк, в которых слово, содержащее 3-й слог, имеет более 3 слогов. Значит, либо 3-й слог является сильным, либо $n \geq 5$. Аналогичное верно и для 8-го слога. Далее, 3-й и 8-й слоги являются одновременно сильными только в пятисложном размере. Легко проверить, что стихотворение действительно подчиняется (5,3)-размеру и не подчиняется другим пятисложным размерам. Размеры с $n > 5$ мы исключаем из рассмотрения (см. ниже).

Для убедительности добавлю, что из наших 20 строк 6 подчиняются (3,3)-размеру, 3 подчиняются (4,1)-размеру, 1 подчиняется (4,4)-размеру, все 20 подчиняются (5,3)-размеру, 10 подчиняются (5,5)-размеру (это – издержки нашего определения) и ни одна не подчиняется ни одному другому $(n,k)$-размеру с $n$, не большим 5. Такую информацию выдала бы нам машина, если бы мы прибегли к ее помощи.

Но где же в «Драконе» протяжная певучесть «Купца Калашникова»? Основная причина ее отсутствия состоит в том, что почти в каждой строке «Дракона», кроме основных ударений на 3-м и 8-м слогах, имеется достаточно отчетливое *дополнительное* ударение либо на 5-м, либо на 6-м слоге. Дополнительные ударения прослеживаются и в других стихах Гумилева, написанных пятисложным размером, а также у Ахматовой и Цветаевой. В какомто смысле и здесь можно было бы говорить о несамостоятельности (пятисложного) размера, но уточнить этот смысл, оставаясь в рамках строгой силлаботоники, нельзя.

К стихам Цветаевой, например, трудно подходить с тем определением размера, которое дано в начале статьи и которым мы все время пользуемся. Многие ее стихи написаны индивидуальным размером с фиксированными, но не составляющими арифметической прогрессии номерами сильных слогов, скажем 3, 6, 8, как в стихотворении

*Юный месяц идет к полуночи:*
*Час монахов – и зорких птиц,*
*Заговорщиков час – и юношей,*
*Час любовников и убийц.*[5]

**Четыре, пять, что дальше?** Дальше – 6. Бывают ли шестисложные размеры? Может быть. Так, правда с некоторой натяжкой, можно назвать шестисложным размер отдельных мест в «Купце Калашникове»:

*Схоронили его за Москвой-рекой...*
*Промеж Тульской, Рязанской,*
*Владимирской...*

Но число 6 имеет слишком много делителей, и шестисложный размер, скорее всего, будет распадаться в двух- или трехсложные (приведенные выше строчки – не исключение). Почти всякое стихотворение, написанное трехсложным размером, будет подчиняться и шестисложному, но это не оказывает влияния на звучание стиха.

Вообще, говоря о $(n,k)$-размерах с бóльшими $n$, следует, во-первых, иметь в виду, что чересчур далеко расставленные сильные слоги вряд ли смогут создать определяющий ритм стиха, а во-вторых, принимать во внимание следующее, чисто арифметическое обстоятельство.

**Упражнение 4.** Пусть $m$ – число слогов в строке. а) Если $n \geq k > m$, то строка заведомо подчиняется $(n,k)$-размеру (сильных слогов нет – сравните со случаем $n = k = 1$). б) Если $k \leq m < k + n$, то условие подчиненности $(n,k)$-размеру не зависит от $n$ и сводится к тому, что $k$-й слог ударен.

Поэтому целесообразно считать (это можно добавить к нашему определению), что число слогов в строках стихотворения, подчиненного $(n,k)$-размеру (хотя бы в большинстве строк), не меньше $k + n$. (Например, бессмысленно искать (5,5)-размер в «Драконе» Гумилева.)

На практике все это означает, что $(n,k)$-размеров с $n$, большим 5, не бывает, так что мы можем закончить наш разговор. За его

[5] Такие размеры являются *логаэдрами*.

пределами остались многочисленные отступления от силлаботоники, которыми богата русская поэзия. Но эти отступления находятся и за пределами нашего арифметического подхода к стихотворным размерам.

**Упражнение 5.** Определите размер следующих стихотворений:

а) *Вам теперь пришлось бы бросить ямб картавый.*
*Нынче наши перья – штык да зубья вил, –*
*Битвы революций посерьезнее «Полтавы»*
*И любовь пограндиознее онегинской любви.*
(Маяковский)

б) *Я мечтою ловил уходящие тени,*
*Уходящие тени погасавшего дня,*
*Я на башню всходил, и дрожали ступени,*
*И дрожали ступени под ногой у меня.*
(Бальмонт)

в) *Ветер злой, ветр крутой в поле*
*Заливается,*
*А сугроб на степной воле*
*Завивается.*
*При луне (на версте мороз –*
*Огонечками!)*
*Про живых ветер весть пронес*
*С позвоночками.*
(Фет)

г) *Как трехсотая, с передачею,*
*Под Крестами будешь стоять*
*И своей слезою горячею*
*Новогодний лед прожигать.*
(Ахматова)

д) *Над широкою рекой,*
*Пояском-мостком перетянутой,*
*Городок стоит небольшой,*
*Летописцем не раз помянутый.*

*Знаю, в этом городке*
*Человечья жизнь настоящая,*
*Словно лодочка на реке,*
*К цели ведомой уходящая.*
(Гумилев)

---

Наступивший новый 2020 год ознаменован 50-летием появления на свет первого номера журнала «Квант». В связи с этим хочу от всей души поздравить всех, кто внес и вносит вклад в развитие журнала, и желаю больших успехов.

Немного о себе. В течение 43 лет я работаю учителем физики в сельской школе Денауского района Сурхандарьинской области в Республике Узбекистан. В течение моей педагогической деятельности многие мои ученики участвовали в республиканских и международных олимпиадах, сотни учеников стали студентами высших учебных заведений. В достижении таких успехов мне и моим ученикам помог и помогает журнал «Квант».

С огромным удовольствием посылаю вам нынешнюю фотографию с первыми номерами «Кванта», вышедшими в 1970 году.

Выражаю огромную благодарность редакции и редколлегии журнала «Квант»!

*Один из тысяч ваших читателей*

*Алиев Султон*

# Задачи по математике и физике

***Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.***

***Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».***

***Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.***

## Задачи М2590–М2593, Ф2597–Ф2600

**М2590.** В остроугольном треугольнике $ABC$ точка $O$ – центр описанной окружности, $H_1$ – основание высоты, проведенной из точки $A$, а $M_H$ и $N_H$ – проекции точки $H_1$ на $AC$ и $AB$ соответственно (рис.1).

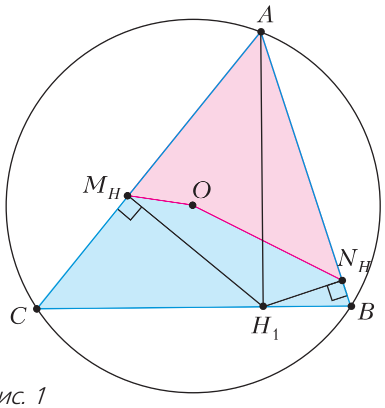


*Рис. 1*

Докажите, что ломаная $M_HON_H$ делит площадь треугольника $ABC$ пополам.

*Авторский семинар И.А.Кушнира*

**М2591.** На плоскости нарисованы 100 синих прямых, среди которых нет параллельных и никакие три из которых не проходят через одну точку. Точки пересечения синих прямых отмечены красным. Могло ли получиться так, что расстояние между любыми двумя красными точками, лежащими на одной синей прямой, равно целому числу?

*Фольклор*

**М2592.** а) Существует ли бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

$$\frac{k(k+1)}{2} - 2^n,$$

где $n$ и $k$ – целые неотрицательные числа?
б*) Пусть задан многочлен $P(x)$, принимающий в целых точках целые значения. Существует ли бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

$$P(k) - 2^n,$$

где $n$ и $k$ – целые неотрицательные числа?

*Ф.Петров*

**М2593*.** Каждая вершина правильного многоугольника окрашена в один из трех цветов так, что в каждый из трех цветов окрашено нечетное число вершин. Докажите, что количество равнобедренных треугольников, вершины которых окрашены в три разных цвета, нечетно.

*Из зарубежных олимпиад*

**Ф2597.** Гантель равномерно тянут вдоль ее оси по горизонтальной плоскости некоторой силой, приложенной в точке $A$ (рис.2). Под каким углом $\alpha$ к горизонту

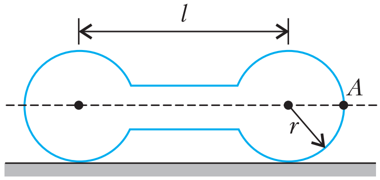


*Рис. 2*

должна быть направлена эта сила, чтобы левый шар действовал на плоскость с вдвое большей силой, чем правый? Размеры гантели приведены на рисунке, а ее коэффициент трения о плоскость равен $\mu$.

*С.Крюков*

**Ф2598.** Автоматический космический корабль совершил посадку на Европу – спутник Юпитера. Установленный на неподвижное ледяное покрытие планеты телескоп был наведен на Солнце, и на видео было записано редкое явление – прохождение Земли по диску Солнца. Земля проходила точно посередине солнечного диска, т.е. условия для наблюдения были самые лучшие. В течение какого максимального и какого минимального промежутков времени могло длиться это событие? Необходимые дополнительные данные отыщите самостоятельно.

*С.Варламов*

**Ф2599.** По тонкому прямому отрезку длиной $L$ равномерно распределен положительный электрический заряд. На большом расстоянии от отрезка (в сравнении с $L$) в точке $A$ вектор напряженности электрического поля, созданного зарядами отрезка, составляет с самим отрезком угол $\alpha < \pi/2$. На каком расстоянии от центра отрезка находится точка, из которой вышла линия напряженности электрического поля, которая прошла через точку $A$?

*В.Плис*

**Ф2600.** По контурам всех трех фигур, изображенных на рисунке 3, проложены одинаковые тонкие проволочки. Для левой фигуры индуктивность равна $L_1$, а для средней фигуры она равна $L_2$. Какова индуктивность для правой фигуры?

*Фольклор*

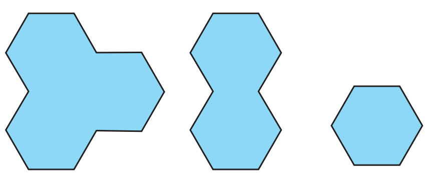


Рис. 3

## Решения задач М2578–М2581, Ф2585–Ф2588

**М2578.** *Даны простые числа $p$, $q$, $r$ и натуральное $n$ такие, что величины*

$$\frac{p+n}{qr},\ \frac{q+n}{rp},\ \frac{r+n}{pq}$$

*являются целыми числами. Докажите, что $p = q = r$.*

Без ограничения общности можем считать, что $p \geq q \geq r$.

Из условия следует, что $q + n$ делится на $p$ и $r + n$ делится на $p$. Тогда $(q+n)-(r+n) = q-r$ также делится на $p$. Но поскольку $0 \leq q-r < p$, единственный возможный случай: $q-r = 0$, т.е. $q = r$.

Далее, поскольку $p + n$ и $r + n = q + n$ делятся на $q$, получаем, что $(p+n)-(q+n) = p-q$ также делится на $q$. Отсюда $p$ делится на $q$, что для простых $p$ и $q$ возможно только в случае $p = q$.

Итак, $p = q = r$. Задача решена.

Пользуясь соображениями из решения, можно описать все тройки натуральных и даже целых чисел $(p,q,r)$, для которых выражения

$$\frac{p+n}{qr},\ \frac{q+n}{rp},\ \frac{r+n}{pq}$$

являются целыми числами.

*Н.Агаханов*

**М2579.** *На экзамен пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задает каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получат оценку "сдал" к концу экзамена?» В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: «сдал» или «не сдал».*

*После того, как все студенты получат оценку, придет инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку «не сдал». Если хотя бы один такой студент найдется, то преподаватель будет отстранен от работы, а оценки всех студентов заменят на «сдал». В противном случае никаких изменений не произойдет.*

*Могут ли студенты придумать стратегию, которая гарантирует им всем оценку «сдал»?*

Опишем, как договориться студентам, чтобы всем сдать экзамен. Рассмотрим конкретного студента Василия. Пусть Василий представит, что преподаватель поставит ему оценку «не сдал», а всем, кто отвечает после него, – оценку «сдал». Тогда в качестве ответа Василий назовет суммарное количество оценок «сдал», полученных студентами в этом случае. Иначе говоря, если $k$ студентов получили оценку «не сдал», то Василий назовет число $99 - k$. Докажем, что, придерживаясь такой стратегии, все студенты сдадут экзамен. Если все студенты получили оценку «сдал», то они добились своей цели. Иначе рассмотрим последнего студента Петра, который получил оценку «не сдал». Поскольку после Петра все получили оценку «сдал», то Петр ответил на вопрос правильно. Таким образом, инспектор заменит все оценки на «сдал».

*Замечание*. Покажем, что стратегия студентов единственно возможная.

Допустим, что первые несколько студентов (возможно, никто) придерживаются указанной стратегии, а Василий – первый, кто назвал число, не соответствующее описанной стратегии. Тогда преподаватель может поставить ему оценку «не сдал», а всем после него – оценку «сдал». В этом случае Василий дал неверный ответ, а все, кто получил оценку «не сдал» (они отвечали до Василия), назвали число, которое больше реального числа оценок «сдал».

*Д.Афризонов*

**М2580.** *Дана выпуклая четырехугольная пирамида с вершиной S и основанием ABCD, причем существует сфера, вписанная в эту пирамиду (т.е. расположенная внутри пирамиды и касающаяся всех ее граней). Пирамиду разрезали по ребрам SA, SB, SC, SD и отогнули грани SAB, SBC, SCD, SDA вовне на плоскость ABCD так, что получился многоугольник AKBLCMDN, как показано на рисунке 1. Докажите, что точки K, L, M, N лежат на одной окружности.*

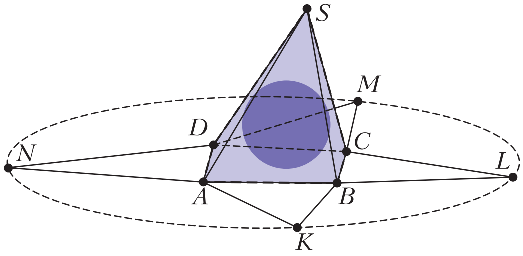



*Рис. 1*

Сделаем гомотетию с центром в $S$, переводящую вписанную сферу в сферу, касающуюся плоскости $ABCD$ с противоположной стороны; таким образом мы получим вневписанную сферу (рис.2). Обозначим точки касания этой вневписанной сферы с плоскостями $ABCD$, $ABS$, $BCS$, $CDS$ и $DAS$ через $T$, $T_K$, $T_L$, $T_M$ и $T_N$ соответственно. Покажем, что $KT = LT = MT = NT$, т.е., что $K$, $L$, $M$ и $N$ лежат на одной окружности с центром $T$. Заметим, что четырехугольники $SBT_KA$ и $KBTA$ симметричны относительно внешней биссекторной плоскости двугранного угла между гранями $ABCD$ и $ABS$; отсюда следует, что $ST_K = KT$. Аналогично, $ST_L = LT$, $ST_M = MT$ и $ST_N = NT$. Кроме того, $ST_K = ST_L = ST_M = ST_N$, как отрезки касательных к вневписанной сфере, проведенных из $S$.

Значит, отрезки $ST_K$, $KT$, $ST_L$, $LT$, $ST_M$, $MT$, $ST_N$, $NT$ равны, и задача решена.

*Замечание*. Аналогичное утверждение верно для описанной $n$-угольной пирамиды при любом $n$. Изложенное выше решение остается в силе. Кроме того, общий случай можно спуском $n \to n-1$ свести к случаю $n = 4$.

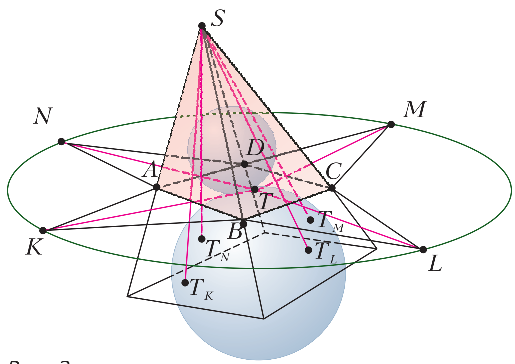



*Рис. 2*

Другое (возможно, более простое) решение задачи можно получить, пользуясь критерием описанности вокруг сферы четырехгранного угла:

$$\angle ASB + \angle CSD = \angle BSC + \angle DSA \cdot$$

Из этого равенства следует, что $\angle AKB + \angle CMD = \angle BLC + \angle DNA$. После этого, учитывая равенство углов в равнобедренных треугольниках $ANK$, $BKL$, $CLM$ и $DMN$, несложно показать, что в четырехугольнике $KLMN$ суммы противоположных углов равны, поэтому он вписанный.

*Г.Кош*

**M2581.** *В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор подписчиков среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг – целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью.*

*Пусть $m$ – некоторое натуральное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на $m$. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.*

Пусть $n$ – количество человек в социальной сети. Будем следить только за остатками рейтингов от деления на $m$. Цель хакера – сделать все $n$ остатков равными 0.

Если бы хакеру разрешалось менять рейтинг более одного раза в день, то он смог бы достичь своей цели уже в первый день. Действительно, он мог бы сначала прибавить несколько раз рейтинг первому пользователю так, чтобы он стал равен 0 по модулю $m$, далее аналогично второму и т.д. В остальные дни хакер может не делать ничего, и рейтинги всех пользователей, начиная со второго дня, будут равны нулю. Назовем это *изначальной стратегией*.

Докажем теперь, что хакер может сделать те же самые изменения рейтингов, но в разные дни, чтобы через некоторое время рейтинги всех пользователей стали равны 0.

Будем представлять состояния социальной сети с помощью строк, состоящих из $n$ остатков по модулю $m$ (соответствующих рейтингам пользователей). Такие строки можно *складывать* по модулю $m$. Например, если $m = 4$ и $n = 6$, то

$$(1,2,3,0,2,1) + (2,3,2,0,2,3) = (3,1,2,0,0,0).$$

Если прямо перед полуночью была строка $X$, обозначим через $f(X)$ строку состояний после полуночи.

**Лемма.** *Функция $f$ аддитивна, т.е. $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$.*

**Доказательство леммы.** Нужно показать, что строки $f(X+Y)$ и $f(X)+f(Y)$ совпадают на каждой позиции, т.е. для каждого пользователя. Рассмотрим произвольного пользователя, пусть его зовут Боб. Пусть в расстановке $X$ у Боба остаток рейтинга $b_x$, а у его подписчиков суммарно $s_x$ (сумма берется по модулю $m$). Пусть в расстановке $Y$ у Боба рейтинг $b_y$, у его подписчиков суммарно $s_y$. Тогда у Боба в $f(X)$ будет $b_x + s_x$, в $f(Y)$ будет $b_y + s_y$, а в $f(X+Y)$ будет $b_x + b_y + s_x + s_y$. Лемма доказана.

Давайте поймем, как одно действие хакера влияет на строки в будущем. Пусть в какой-то день была строка $X$, тогда, если бы хакер не вносил никаких изменений, мы получили бы последовательность строк

$$X,\ f(X),\ f(f(X)),\ \ldots,\ f^k(X),\ \ldots$$

где $f^k$ обозначает $k$ раз примененное преобразование $f$.

Если в первый день хакер увеличит у Боба рейтинг на 1, а больше изменений вносить не будет, то мы получим, в силу аддитивности, последовательность

$$X + e_b,\ f(X) + f(e_b),\ \ldots,\ f^k(X) + f^k(e_b),\ \ldots,$$

где в строке $e_b = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots 0)$ единичка стоит на месте, соответствующем Бобу. Таким образом, через $k$ дней разница будет

$f^k(e_b)$. Аналогично показывается следующее: пусть есть строка $X$ и две стратегии хакера, которые отличаются только прибавлением $e_b$ в один из дней. Тогда через $k$ дней результаты этих стратегий будут отличаться на $f^k(e_b)$.

Каждая строка в последовательности $\left(f^k(e_b)\right)$ определяется по предыдущей строке, а всего различных возможных строк не более чем $m^n$. Поэтому последовательность $\left(f^k(e_b)\right)$ периодична, возможно, с предпериодом. Пусть $T_b$ – длина периода. Заметим, что если поменять стратегию хакера, заменив прибавление $e_b$ в один из дней на прибавление $e_b$ ровно через $T_b$ дней, то результаты этих стратегий рано или поздно (не позднее чем через $m^n$ дней) перестанут отличаться.

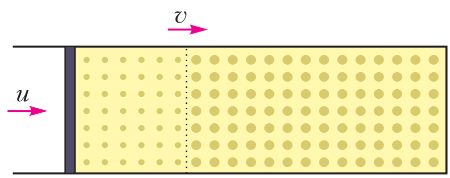
Теперь будем последовательно переносить все изменения рейтингов из первого дня в другие дни так, чтобы действия хакера совершались в разные дни. Это можно сделать, так как для каждого действия можно прибавлять соответствующий период сколько угодно раз.

Таким образом, мы получим стратегию для хакера, результат которой через некоторое время (не более чем через $m^n$ дней после последнего изменения) не отличается от изначальной стратегии с изменениями всех рейтингов в первый день. Результатом изначальной стратегии в этот момент времени будет строка из всех нулей. Таким образом, результатом нашей новой стратегии с не более чем одним изменением в день тоже будет нулевая строка.

*В.Новиков*

**Ф2585.** *Цилиндр заполнен материалом с множеством однородно распределенных пор, число которых в единице объема цилиндра* $100$ *см*$^{-3}$. *Слева в цилиндр со скоростью* $u = 5$ *см/с вдвигают поршень. Перед ним образуется область уплотнения (см. рисунок), в которой объем каждой поры уменьшается на* $5$ *мм*$^3$. *Считайте, что плотность материала между порами не изменяется.*

1) *Найдите скорость* $v$ *границы раздела уплотненной и неуплотненной частей.*




*Ответ выразите в см/с, округлите до целых.*

2) *Найдите число пор в единице объема цилиндра в области уплотнения. Ответ выразите в см*$^{-3}$, *округлите до целых.*

Пусть $L$ – расстояние от поршня до правого торца цилиндра в момент начала уплотнения. Объем между ними $V_1 = SL$, где $S$ – сечение цилиндра. Раз объем содержит материал до уплотнения, то число пор в нем $N = n_1V_1 = n_1SL$. При скорости $v$ граница области уплотнения дойдет до торца за время $t = L/v$, а тогда объем между поршнем и торцом $V_2 = S(L-ut) = SL(1-u/v)$ – это объем всей области уплотнения. Поскольку общее число пор не изменилось, то число пор в единице объема области уплотнения $n_2 = N/V_2 = n_1v/(v-u)$. Из постоянства плотности сплошного материала следует низменность его объема. Тогда сокращение объема между поршнем и торцом $Sut$ равно суммарному сокращению объема пор $N\Delta V$. После подстановок и упрощений получаем $u/v = n_1\Delta V$, откуда находим искомую скорость границы раздела:

$$v = \frac{u}{n_1\Delta V} = 10 \text{ см/с}.$$

По найденному значению скорости границы находим новую плотность пор:

$$n_2 = \frac{n_1v}{v-u} = \frac{n_1}{1-n_1\Delta V} = 200 \text{ см}^{-3}.$$

*И.Воробьев*

**Ф2586.** *Самолет вылетел из аэропорта Пулково (Санкт-Петербург) в* $00$ *часов* $00$ *минут по московскому времени и летит все время с постоянной по величине скоростью* $v = 1000$ *км/ч в направлении на юго-запад. В какое время (по Москве) самолет пересечет экватор и какую стра-*

*ну смогут увидеть пассажиры в иллюминаторы самолета?*

Географические координаты Санкт-Петербурга – это приблизительно $60°$ северной широты и $30°$ восточной долготы. По первому определению метра, он составляет одну сорокамиллионнную от длины меридиана, проходящего через Париж, или одну десятимиллионную четверти длины этого меридиана. Если бы самолет летел строго на юг, то он оказался бы на экваторе через $60° \times 10$ ч$/90° = 20/3$ ч. Но поскольку проекция скорости самолета на это направление составляет $v/\sqrt{2}$, то на это потребовалось время $\sqrt{2} \cdot 20/3$ ч $\approx 9$ ч $26$ мин. Это и будет время «по Москве».

За время полета до экватора самолет сместился к югу на $60°$, а в направлении на запад смещение в градусах будет больше:

$$\Delta\varphi = \int_0^{60} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \approx 75{,}5°.$$

Таким образом, самолет окажется на экваторе в месте, географическая долгота которого западная и равная $\approx 45{,}5°$. Из иллюминаторов пассажиры самолета смогут увидеть северное атлантическое побережье Бразилии, поскольку самолет в этот момент будет лететь над океаном, а местное время (в Бразилии) будет на 6 часов меньше московского, т.е. приблизительно 3 ч 26 мин.

*С.Варламов*

**Ф2587.** *Чтобы передвинуть поддон, на котором находилось* 1000 *кирпичей, использовали грузовик. Когда прикрепили трос к верхнему крючку поддона (рис.1,а), то грузовик пробуксовывал и не смог сдвинуть груз. Чтобы он смог сдвинуть груз, нужно снять не менее* 315 *кирпичей. Если же прикрепить трос к нижнему крючку (рис.1,б), то грузовик сможет сдвинуть груз, даже если к исходным* 1000 *кирпичам добавить* 315 *кирпичей. В обоих случаях трос образовывал один и тот же угол с горизонтом. Определите массу грузовика «в кирпичах», если масса поддона равна массе* 125 *кирпичей. Ответ округлите до целых. Коэффициент трения колес и поддона о землю одинаковый, двигатель передает вращение на все колеса.*

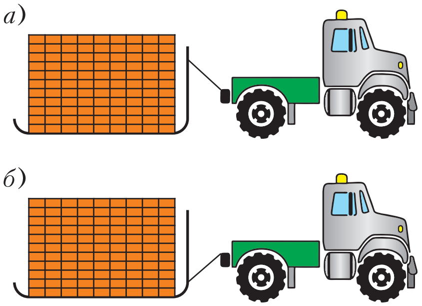


Рис. 1

Расставим силы, действующие на грузовик и поддон в обоих случаях (рис.2). Учитывая, что грузовик с поддоном вот-вот поедут, т.е. сила трения равна $\mu N$, запишем условия равновесия вдоль горизонтальной оси:

$F_{тр1} = T\cos\alpha = F_{тр2}$, или

$$N_1 = N_2 = \frac{\cos\alpha}{\mu}T,$$

$F_{тр3} = T_1\cos\alpha = F_{тр4}$, или

$$N_3 = N_4 = \frac{\cos\alpha}{\mu}T_1.$$

Теперь запишем условия равновесия поддона и грузовика вдоль вертикальной оси:

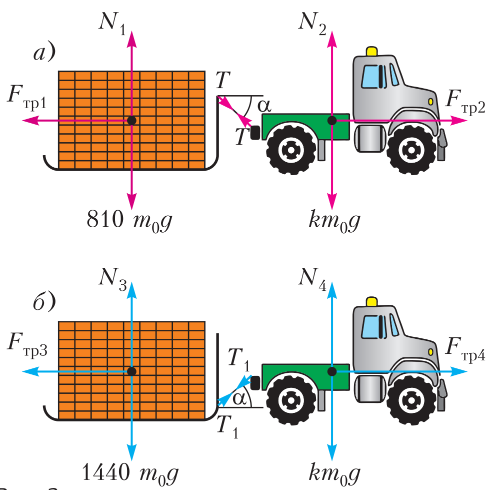


Рис. 2

$$N_1 - T\sin\alpha = 810m_0g\,,$$

$$km_0g = N_2 + T\sin\alpha\,,$$

$$1440m_0g = N_3 + T_1\sin\alpha\,,$$

$$N_4 - T_1\sin\alpha = km_0g\,,$$

где $k$ – масса грузовика «в кирпичах». Разделим первое уравнение на четвертое и второе уравнение на третье:

$$\frac{N_1 - T\sin\alpha}{N_4 - T_1\sin\alpha} = \frac{T}{T_1} = \frac{810}{k}\,,$$

$$\frac{N_2 + T\sin\alpha}{N_3 + T_1\sin\alpha} = \frac{T}{T_1} = \frac{k}{1440}\,.$$

Отсюда получаем

$k = \sqrt{810 \cdot 1440} = 1080$ кирпичей.

*А.Бычков*

**Ф2588.** *Участок электрической цепи содержит семь резисторов (рис.1). Устройство, в состав которого входит этот участок цепи, корректно работает, если номиналы указанных резисторов равны их номерам: $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом и т.д. Резистор $R_2$ перегорел и заменить его новым резистором номиналом 2 Ом невозможно. Для восстановления работоспособности устройства один из оставшихся резисторов заменили резистором другого номинала.*

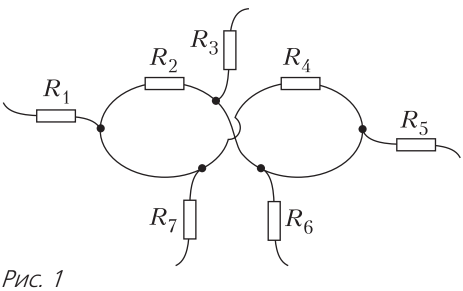



Рис. 1

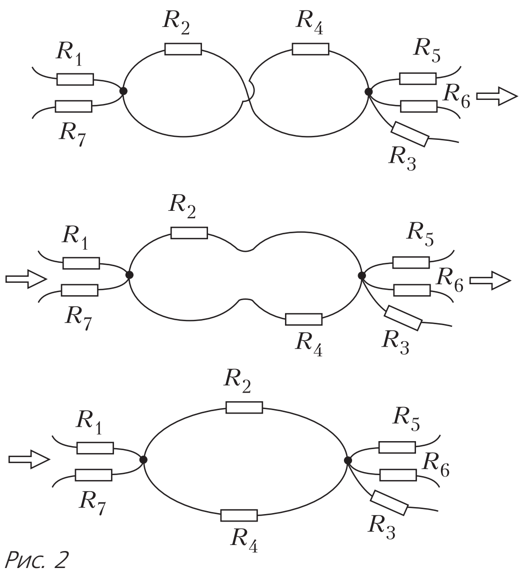



Рис. 2

1) *Какой резистор было заменен? Укажите номер этого резистора.*
2) *Резистор какого номинала впаяли вместо перегоревшего? Ответ выразите в омах и округлите до сотых.*

Преобразуем схему, как показано на рисунке 2. Теперь видно, что в приведенной схеме сопротивления $R_2$ и $R_4$ включены параллельно. Поэтому в исходной схеме они выполняли роль одного сопротивления с номиналом

$$R_{24} = \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4} = \frac{4}{3}\text{ Ом}\,.$$

После того как сопротивление $R_2$ перегорело, для восстановления работоспособности схемы достаточно заменить сопротивление $R_4$ одним сопротивлением с номиналом $R_{24} = \dfrac{4}{3}$ Ом.

*А.Бычков*

# Модели, которые мы выбираем

*А.ЗИЛЬБЕРМАН*

Для анализа физических явлений мы всегда пользуемся моделями, упрощая и идеализируя реальную ситуацию. Ясно, что в каждом конкретном случае нужно отразить в модели все важные для данной задачи детали и отбросить все лишние. (Этот совет, как и многие другие, легче давать, чем ему следовать.) Поэтому при выборе модели следует оценить, хотя бы приблизительно, действие факторов, которые мы хотим отбросить, и посмотреть, как скажутся сделанные нами допущения и упрощения на точности получаемого решения задачи.

Рассмотрим пример: спортсмен толкает ядро с высоты $h = 1{,}5$ м под углом $\beta = 40°$ к горизонту со скоростью $v = 12$ м/с, и надо найти дальность полета ядра.

Выберем модель: плоская невращающаяся Земля, воздуха нет, нет также Солнца и Луны. Оценим воздействие отброшенных факторов.

*Солнце* дает поправку к ускорению свободного падения

$$\Delta g_1 = \omega_1^2 R_1, \text{ где } \omega_1 = 2\pi/1 \text{ год},$$

$$R_1 = 150 \text{ млн км};$$

$$\Delta q_1 \lesssim 10^{-2} \text{ м/с}^2 \approx 10^{-3} g.$$

*Луна* дает примерно то же (вспомним приливы).

*Сопротивление воздуха* обусловливает силу лобового сопротивления $F = \alpha S v^2$. Величину $\alpha$ приблизительно можно оценить, зная скорость выпадения града $v_г \approx 20$ м/с при $r_г \approx 0{,}5$ см:

$$\alpha\pi r_г^2 v_г^2 = m_г g = \rho_г \cdot \frac{4}{3}\pi r_г^3 g, \text{ и } \alpha = \frac{4\rho_г r_г g}{3v_г^2}.$$

Для ядра скорость $v_я$, при которой сила лобового сопротивления воздуха равна силе тяжести, определяется условием

$$v_я = v_г\sqrt{\frac{\rho_я r_я}{\rho_г r_г}} \approx 200 \text{ м/с}.$$

Значит, для данной в условии скорости

$$F_{сопр} = mg\left(\frac{12}{200}\right)^2 \approx 3\cdot 10^{-3} mg.$$

(Отметим, что при таких скоростях сила вязкого трения больше, чем лобового сопротивления, однако она также невелика.)

*Архимедова сила* со стороны воздуха равна

$$F_A = \frac{\rho_в}{\rho_я} mg \lesssim 10^{-3} mg.$$

Поправка к ускорению свободного падения *из-за вращения Земли* равна

$$\Delta g_2 = \omega_2^2 R_2,$$

где $\omega_2 = 2\pi/1$ сутки, $R_2 = 6{,}3\cdot 10^6 \cos\varphi$ ($\varphi$ – широта местности). На экваторе, скажем,

$$\Delta g_2 \lesssim 3\cdot 10^{-3} g.$$

Цифры в задаче заданы «круглые»; из простых практических соображений ясно, что требуемая точность уж никак не лучше 3–5%. Значит, все перечисленные поправки несущественны, и модель наша вполне разумна. Решение задачи совсем простое, и мы его не приводим.

Возможны, однако, ситуации, когда даже небольшие поправки могут оказать решающее воздействие на результат. Это может произойти, например, если мы заинтересуемся различиями в движении нескольких тел. Рассмотрите самостоятельно такой вопрос: попадет ли вертикально выстреленный снаряд назад в ствол орудия?

Модель может оказаться и совсем неприменимой, если она не отражает существенных черт явления. Так, модель абсолютно твердого тела для описания удара никак не применима – важную роль при ударе игра-

Опубликовано в «Кванте» №8 за 1981 год.

ют деформации, а абсолютно твердое тело не деформируется. Еще пример: часто пренебрегают индуктивностью проводников (или – что то же самое – энергией магнитного поля, возникающего вокруг проводника при пропускании по нему тока). Однако в известной задаче про конденсатор, который после зарядки закорачивают проводником, нельзя одновременно пренебрегать сопротивлением проводника и его индуктивностью – если сопротивление очень мало, то ток получается весьма большим и даже при малой индуктивности энергия магнитного поля оказывается существенной. Простой анализ показывает, что индуктивностью действительно можно пренебречь, только если выполняется условие

$$L \ll R^2 C .$$

Очень часто при использовании «плохой» модели концы не сходятся с концами – куда-то девается (или появляется) энергия, не хватает уравнений для решения задачи и т.п. Это всегда должно настораживать!

Разберем полезный пример: на двух нитях подвешена однородная балка. Требуется найти силы натяжения нитей.

Задача эта очень просто решается: нити будем считать нерастяжимыми, составим уравнения равновесия, т.е. запишем условия равенства сил и моментов сил, – и неизвестные величины сразу определятся.

Добавим теперь еще одну нить. Сразу появляются неприятности – не хватает уравнений. В чем дело?

Причина тут довольно серьезная – не годится модель. В случае двух нитей она подходила – малые растяжения нитей были несущественны, они приводили лишь к тому, что балка висела чуть криво, а силы при этом практически не менялись. Если же нитей три, положение совсем другое. Немного ослабим одну нить – вся нагрузка сразу придется на две другие. Значит, малые растяжения существенны и модель «нерастяжимые нити» не годится. (Ведь можно пренебрегать каким-то фактором, только убедившись, что его влияние пренебрежимо мало.)

Положение легко поправить – нужно задать жесткости нитей (можно одинаковые, если их длины одинаковы) и из геометрических соображений найти связь между удлинениями нитей, а значит, и между силами натяжения. Это и будет недостающее уравнение.

Системы такого рода называют «статически неопределимыми», имея в виду необходимость к уравнениям сил и моментов – уравнениям статики – добавлять уравнения, характеризующие физические свойства тел (например, жесткость). Статически неопределимые задачи встречаются не так уж редко. Например, задача о распределении сил давления на кирпич, лежащий на наклонной плоскости. Она похожа на предыдущую, только опор (нитей) не три, а очень много. Малейшая неровность на основании кирпича кардинально меняет результат – кирпич нельзя считать абсолютно твердым телом.

Особенно каверзными бывают задачи, где взаимодействуют много тел и при этом есть трение. Один пример: задача про песок, насыпанный в кузов автомобиля (см. задачу Ф656). Давление на стенку кузова зависит и от того, как мы насыпали песок, и от того, как именно движется автомобиль (напомним тем, кто давно не ездил в кузове грузового автомобиля, что даже при движении с постоянной скоростью кузов сильно трясет). Из-за непрерывных толчков в разные стороны сухой песок постоянно перемешивается, при этом силы трения между песчинками все время меняют направление. В среднем при этом действие сил трения компенсируется, и песок напоминает жидкость, налитую в кузов. (Нечто похожее происходит, когда, желая наблюдать картину силовых линий магнитного поля, мы насыпаем железные опилки на лист бумаги и потряхиваем его, чтобы ослабить трение.) В этом случае задачу легко решить.

Однако все может происходить иначе. Мы можем, например, плотно набить песок в кузов, добиваясь «заклинивания» песчинок, когда уже никакая тряска не поможет – сила давления на стенку может при этом оказаться во много раз больше.

Если же мы насыпаем песок медленно и аккуратно, конусом, а потом осторожно заполняем края и тщательно избегаем тряски, то сила давления возможно будет существенно меньше, чем в «гидростатическом» случае.

В общем, статически неопределимые задачи имеют множество одинаково верных (и неверных, разумеется) решений.

Разумный выбор модели может очень облегчить решение серьезной проблемы, причем модель может быть и очень неожиданной. Так, капельная модель ядра позволила оценить многие эффекты, связанные с устойчивостью ядер, а планетарная модель атома дает возможность вычислить множество полезных величин, хотя ясно, что на самом деле все устроено совсем не так. Ведь модель должна передавать далеко не все свойства изучаемого объекта (как, например, гиря на чашке весов моделирует далеко не все свойства взвешиваемого куска сыра).

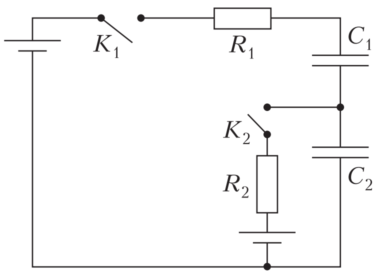
Итак, при выборе модели явления нужно быть очень аккуратным, не забывая, однако, о том, что живо и наглядно представить себе явление – значит существенно продвинуться в решении задачи.

### Поправка

В решение задачи Ф2579 («Квант» №11 за 2019 г.) вкралась ошибка. Правильное решение привел наш читатель Данил Груздов. Он отметил, что формулы для $Q_1$ и $Q_3$, приведенные в журнале, неправильно учитывают работу источников тока. С учетом правильного вычисления работы источников должно быть:

$$Q_1 = CU\mathcal{E} - CU^2/2 \text{ и } Q_3 = 3CU\mathcal{E} - CU^2.$$

Тогда получается, что суммарное выделенное количество теплоты не зависит от последовательности замыкания ключей $K_1$, $K_2$ и временно́й задержки и равно $Q = 2{,}5C\mathcal{E}^2$.




Однако заметим, что автор задачи предполагал вопрос, который не вошел в условие. А именно: при какой последовательности замыкания ключей в том или другом резисторе выделится минимальное количество теплоты? Численный метод решения задачи с этим вопросом дает такой результат.

Если сначала замыкается ключ $K_1$ и на каждом конденсаторе в момент включения ключа $K_2$ устанавливается напряжение $\mathcal{E}$, то в резисторе $R_2$ выделяется всего 6,67% от общего количества теплоты, выделившегося в двух резисторах.

В случае когда первым включается ключ $K_2$ и одновременно включается ключ $K_1$, т.е. задержки нет, то во втором резисторе выделяется минимальное количество теплоты и оно равно 13,35% от общего количества.

Минимальное количество теплоты выделится в резисторе $R_1$, если сначала на большое время будет включен ключ $K_2$ и на конденсаторе $C_2$ установится напряжение $\mathcal{E}$, а затем будет замкнут ключ $K_1$. В этом случае в резисторе $R_1$ выделится 53,35% от общего количества теплоты.

Отношение полученных минимальных значений близко к отношению целых чисел 1:2:8.

# Задачи

**1.** По двум перпендикулярным дорогам с постоянными скоростями в сторону перекрестка едут две машины $A$ и $B$ ($A$ – по одной дороге, $B$ – по другой). Когда $A$ достигла перекрестка, расстояние между машинами было

300 м. Когда после этого $B$ в момент времени $T$ достигла перекрестка, расстояние между машинами стало 200 м. Какое расстояние будет между машинами, когда машина $B$ проедет еще 300 м после момента времени $T$?

*Н.Агаханов, О.Подлипский*

**2.** Семь последовательных натуральных чисел как-то расставили по кругу. После этого для каждой пары соседних чисел вычислили разность между ними (из большего числа вычли меньшее). Могли ли пять подряд идущих

разностей (из семи) равняться числам 2, 1, 6, 1, 2?

*Н.Агаханов, О.Подлипский*

**3.** На стороне $AB$ квадрата $ABCD$ отмечена произвольная точка $K$. Пользуясь только линейкой без делений, постройте какой-нибудь прямо-

угольник с вершиной $K$, вписанный в этот квадрат. (Каждая сторона квадрата должна содержать одну вершину прямоугольника.)

*Г.Филипповский*

**4.** Каждый из 13 ребят задумал целое число. Оказалось, что сумма задуманных чисел равна 125. После чего каждый изменил свое число: либо разделил его на 3, либо умножил его на 5. Могла ли сумма полученных 13 чисел равняться 175?

*Н.Агаханов, О.Подлипский*

*Иллюстрации Д.Гришуковой*

Задача 1 предлагалась на школьном, а задачи 2 и 4 – на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады по математике в Московской области. Задача 3 предлагалась на Турнире математических боев имени А.П.Савина.

# КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

***Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».***

***Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.***

***Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest***

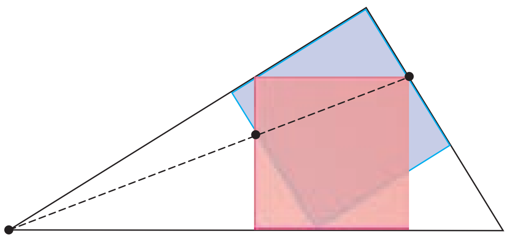
***Желаем успеха!***

**21.** Число 1210 *автобиографичное*: его первая цифра показывает, сколько в нем нулей, вторая – сколько единиц, третья – сколько двоек, а четвертая – сколько троек. Найдите следующее автобиографичное целое число.

*По мотивам задачи Мартина Гарднера*

**22.** В прямоугольный треугольник вписаны два квадрата, как показано на рисунке. Докажите, что три отмеченные точки лежат на одной прямой.

*В.Айзенштадт*



**23.** Числа $x, y, z$ положительные и $xyz = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{x^2+y}+\frac{y}{y^2+z}+\frac{z}{z^2+x} \le \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{2}.$$

*С.Дворянинов*

**24.** В левой нижней клетке квадратного поля $10 \times 10$ стоит красная фишка, в правой верхней клетке – синяя. За один шаг красная фишка перемещается на соседнее поле либо вверх, либо вправо, а синяя – либо вниз, либо налево. Фишка не может вставать на поле, на котором сейчас стоит другая фишка. Фишки делают шаги по очереди: начинает красная, потом ходит синяя, потом снова красная и т.д., пока каждая фишка не займет угол, противоположный своему начальному углу. Сколько есть способов совершить такие передвижения?

*В.Расторгуев*

# Буриданов осел, или Немного о бифуркации

А.СТАСЕНКО

*Излагай кратко, но сжато.*
Козьма Прутков

Еще великий Аристотель (IV в. до н.э.) вообразил осла, стоящего посредине между двух охапок сена и бесконечно долго пытающегося решить, какую из них предпочесть. Более чем через тысячу лет этот светлый образ был приписан европейцами Жану Буридану (XIV в.). Напомним, что выбор одного из двух вариантов связан с так называемой бифуркацией, раздвоением.

В природе тоже возникают ситуации, при которых нужно сделать выбор. Например, известная новороссийская бора – сильный, порывистый, холодный местный ветер.

Представим горный хребет, который обтекается воздухом. Одна из возможностей: натекая из бесконечности со скоростью $v_1$, поток, перевалив через хребет, снова приобретает такую же скорость: $v_2 \approx v_1$. При этом линии тока будут симметричными относительно вертикали $AB$ (рис.1,*а*).

Но есть и другая возможность. Если воздух в верхней части потока холодный, а значит плотный, «тяжелый», то с вершины хребта он ринется вниз по склону, его скорость резко возрастет: $v_2 > v_1$, а сечение потока уменьшится (рис.1,*б*). При этом порывы ветра достигают 80 м/с, температура может упасть на десятки градусов. Поэтому уравнение сохранения потока массы запишется в виде

$$\rho_1 v_1 h_1 = \rho_2 v_2 h_2 ,$$

где $\rho_1$, $\rho_2$ – соответствующие значения плотности воздуха. В этом случае сила тяготения

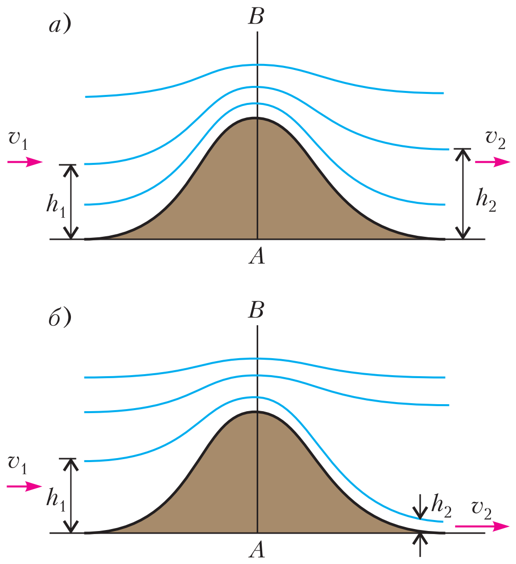



*Рис. 1. а) Симметричная картина обтекания хребта воздушным потоком. б) Образование за хребтом высокоскоростного потока воздуха (бора)*

служит тем «толчком», который заставляет поток воздуха превращаться в ураган.

А вот сопло ракетного двигателя или аэродинамической трубы, предназначенное для превращения первоначального теплосодержания газа (ученые люди говорят – «энтальпии»), нагретого до температуры $T_0$, в его кинетическую энергию (рис.2). Как известно, формула Циолковского для скорости ракеты

$$v(t) = u \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

советует реализовать как можно большую скорость истечения $u$. Ее значение можно

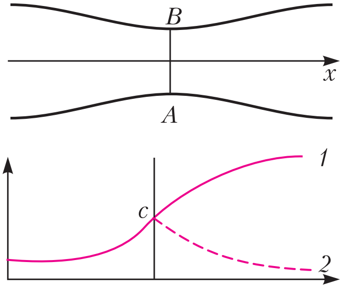



*Рис. 2. Сверхзвуковое сопло: AB – критическое сечение, $v = c$ – локальная скорость звука, 1 – сверхзвуковой поток, 2 – дозвуковой поток*

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200202

оценить из закона сохранения энергии

$$\frac{u_{\max}^2}{2} = c_p T_0 ,$$

где $c_p$ – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении.

Наука Газодинамика дает два возможных решения: после достижения скорости звука (в критическом сечении сопла) поток в расширяющейся части сопла может или «свалиться» в дозвуковой режим (пунктирная кривая на рисунке 2), или продолжить ускорение (кривая *1*) вплоть до значения $u_{\max}$. Типичная бифуркация!

А надпись на пограничном камне предлагает древнему богатырю даже больше возможностей: «Налево пойдешь – коня потеряешь, направо пойдешь – жизнь потеряешь, прямо пойдешь – жив будешь, да себя позабудешь». (Это — один из наборов фольклорных возможностей; современные шутливые физики предложили более краткую надпись – «Без вариантов».)

Ученые оценили энергетическую «стоимость» одного бита информации (или – или, одно из двух):

$$E_{\min} = kT \ln 2 ,$$

где $k \approx 1{,}4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $T$ – температура окружающей среды. При $T = 300$ К имеем $E_{\min} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-21}$ Дж $\approx$ $\approx 0{,}02$ эВ. Любой комар мог намекнуть богатырю, какую дорогу сейчас лучше выбрать, – ведь надпись на камне могла устареть за сотни лет.

Еще больше возможностей предоставляет так называемое логистическое уравнение, с виду совершенно безобидное:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x).$$

Оно было получено (П.Ферхюльст, 1838 г.) при исследовании скорости роста населения с учетом уменьшения этой скорости вследствие ограниченности ресурсов (отрицательное слагаемое в правой части уравнения). Его конечноразностный вариант, приготовленный для обработки на компьютере, выглядит совсем просто:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

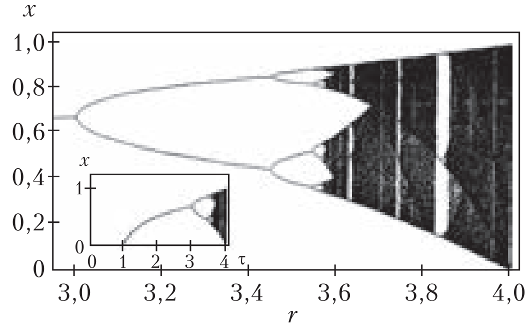



*Рис. 3. Бифуркация решений логистического уравнения*

Казалось бы – что особенного? Но вот последовательность его решений в зависимости от параметра $r$ выглядит необычно (рис.3; взят из книги В.Н.Жигулева «Динамика неустойчивостей» – М.: МФТИ, 1996). Видно, что многочисленные бифуркации, возникающие с ростом параметра, в конце концов приводят к хаосу, который в гидродинамике пытаются связывать с турбулентностью, в экономике – с крахом. Список разделов знания, в которых логистическое уравнение отражает простейшую моделью изучаемого явления, обширен. Некоторые ученые называют его уравнением Жизни. Вернуться в начало координат из любой точки, соответствующей максимальному значению $r$, – то же, что отличнику ЕГЭ оказаться снова в роддоме с номерком на ножке. Такой процесс маловероятен, ситуация необратима.

Итак, вспоминая о бифуркациях, стоит обдумывать каждый шаг и твердо делать выбор – в отличие от буриданова осла.

# Муравей на консервной банке

*И.АКУЛИЧ*

### Правы ли школьники?

Два школьника задумались над решением следующей задачи:

*Консервная банка имеет форму прямого кругового цилиндра радиусом R и высотой H. На окружности одного из оснований находится муравей – в точке A на рисунке 1. Он хочет переползти по поверхности банки в наиболее удаленную от него точку B на окружности другого основания (симметричную точке A относительно центра банки). Как он должен ползти, чтобы длина пути была наименьшей?*

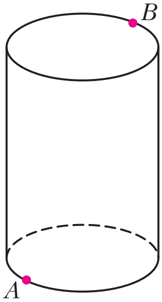



*Рис. 1*

– Но ведь это – совсем простая задача! – уверенно сказал первый школьник. – Нужно сделать развертку поверхности цилиндра на плоскость. Для определенности будем считать, что муравей ползет сначала по боковой поверхности, а потом по верхнему основанию (возможен, разумеется, и симметричный путь: сначала по нижнему основанию, а потом по боковой поверхности, длина которого такая же). Развернув банку (рис.2,*а*), мы сразу же получаем. что кратчайший путь – сначала по образующей $AM$, затем по диаметру $MB$. Длина этого пути, очевидно, равна $S_{\min} = H + 2R$.

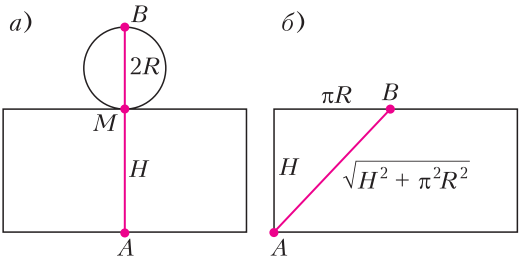



*Рис. 2*

– Постой-ка, – возразил другой школьник, – но ведь гораздо удобнее развернуть банку по-другому. Отбросим донышко вообще, а боковую поверхность развернем в прямоугольник (рис.2,*б*). Тогда кратчайший путь – это отрезок, соединяющий точки $A$ и $B$; длина его равна $S_{\min} = \sqrt{H^2 + \pi^2 R^2}$. А на банке путь муравья будет участком винтовой линии.

Школьники заспорили, но потом нашли выход: надо сравнить два полученных результата, и какой из них меньше – тот и будет искомым маршрутом. Сначала они определили, при каких условиях оба пути будут равны по длине; для этого они их просто приравняли:

$$H + 2R = \sqrt{H^2 + \pi^2 R^2},$$

затем преобразовали:

$$(H + 2R)^2 = H^2 + \pi^2 R^2,$$

Опубликовано в «Кванте» № 9 за 1989 год.

$$H^2 + 4HR + 4R^2 = H^2 + \pi^2 R^2,$$

$$4H = \left(\pi^2 - 4\right)R,$$

$$\frac{H}{R} = \frac{\pi^2}{4} - 1 \approx 1,467.$$

Итак, пути равны при определенном соотношении высоты и радиуса банки. Отсюда легко сделать вывод, что если $\frac{H}{R} < \frac{\pi^2}{4} - 1$, то кратчайший путь предложил первый ученик, а если $\frac{H}{R} > \frac{\pi^2}{4} - 1$, то кратчайший путь указал второй.

Обрадованные школьники не удержались, чтобы на следующий день не похвастаться перед учителем математики своим решением.

Вопрос к читателю: что бы вы сказали им, будучи их учителем?

### Нет, не правы!

Давайте ответим вместе: ребята, вы ошибаетесь! Вы, конечно, решили задачу, но... совсем другую. А именно: вы взяли два возможных пути из точки $A$ в точку $B$ и определили, при каких условиях какой из путей будет короче. Но ведь кроме этих двух путей возможны еще многие другие пути (рис. 3), идущие от точки $A$ по боковой поверхности к произвольной точке $P$ на окружности верхнего основания, а от точки $P$ к точке $B$ – по отрезку прямой на верхнем основании. Как видно, маршруты, предложенные школьниками, представляют собой лишь частные случаи возможного пути: у первого школьника точка $P$ совпадает с точкой $M$, у второго она совпадает с $B$, т.е. школьники предложили два «крайних» варианта. Ну а истина, несомненно, где-то посредине.

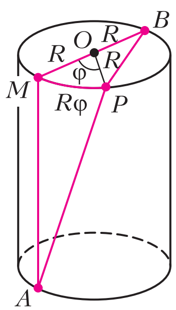


*Рис. 3*

### Давайте разберемся

Итак, поищем кратчайший путь. Если обозначить центр верхнего основания через $O$, а угол $MOP$ через $\varphi$, то мы без особого труда определим, что длина дуги $MP$ равна $R\varphi$, длина кратчайшей линии $AP$ равна $\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}$ (по теореме Пифагора), а длина отрезка $PB$ равна $2R\cos\frac{\varphi}{2}$. Таким образом, длина пути является функцией от $\varphi$ и равна

$$S = \sqrt{H^2 + R^2\varphi^2} + 2R\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Осталось только найти минимум этой функции на участке $\varphi \in [0;\pi]$.

Как это делать – известно. Минимум может достигаться либо на одном из концов интервала, либо где-то в середине. Что касается концов, то эту часть задачи рассмотрели сами школьники (их маршруты соответствуют значениям $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$). А как найти минимум функции внутри интервала? Здесь универсальный способ дает дифференциальное исчисление. Возьмем производную:

$$S' = \frac{R^2\varphi}{\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}} - R\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Те точки интервала $(0;\pi)$, в которых эта производная обращается в ноль или не определена (впрочем, последнее в данном случае невозможно), являются точками, *подозрительными на экстремум*: если функция имеет на этом отрезке локальные максимумы или минимумы, то они могут достигаться только в таких точках. Приравняем производную к нулю:

$$\frac{R^2\varphi}{\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}} - R\sin\frac{\varphi}{2} = 0,$$

или, после упрощений:

$$\frac{R\varphi}{\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}} = \sin\frac{\varphi}{2}. \qquad (1)$$

Осталось найти отсюда все $\varphi$, входящие в интервал $(0;\pi)$, определить для этих $\varphi$ значения $S$ и среди всех полученных таким образом $S(\varphi)$, а также концевых значений $S(0)$ и $S(\pi)$ выбрать наименьшее. И никаких проблем!

### Скоро сказка сказывается...

Вот именно. И первая же непреодолимая трудность – решение уравнения (1). Оно *не решается*, т.е. выразить из него $\varphi$ через $H$ и $R$ в виде элементарных функций никоим образом не удается.

Как же быть? Выход один – отыскать какой-нибудь обходной вариант. Прежде всего отметим: если функция имеет в какой-либо точке локальный минимум, то это значит, что слева от этой точки она убывает, а справа возрастает, поэтому производная ее слева – отрицательна, в самой точке равна нулю, а справа – положительна. Иначе говоря, *производная в некоторой окрестности точки минимума возрастает*. Следовательно, вторая производная должна быть в точке минимума положительной (в крайнем случае – нулевой). Если же она строго отрицательна, то можно наверняка утверждать – в этой точке локального минимума нет (а есть, понятное дело, максимум).

Найдем вторую производную:

$$S'' = \frac{R^2H^2}{\sqrt{\left(H^2+R^2\varphi^2\right)^3}} - \frac{R}{2}\cos\frac{\varphi}{2}. \qquad (2)$$

Выясним ее знак при тех $\varphi$, для которых первая производная обращается в ноль, т.е. для которых справедливо равенство (1). Но как это сделать? Предлагается хитрый ход: выразим из уравнения (1) величины $\sqrt{H^2+R^2\varphi^2}$ и $H^2$:

$$\sqrt{H^2+R^2\varphi^2} = R\varphi\Big/\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$H^2 = \left(R\varphi\Big/\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 - R^2\varphi^2 = R^2\varphi^2\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} - 1\right) = R^2\varphi^2\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}\Big/\sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Подставим эти значения в выражение (2):

$$S'' = \frac{R^2\cdot R^2\varphi^2\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}\Big/\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}{\left(R\varphi\Big/\sin\frac{\varphi}{2}\right)^3} - \frac{R}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{2\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} - \varphi\right) = \frac{R}{2\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}(\sin\varphi - \varphi).$$

Если $0<\varphi<\pi$, то множитель перед скобкой положителен и, следовательно, знак $S''$ совпадает со знаком выражения $(\sin\varphi - \varphi)$. Но, как известно, если $0<\varphi<\pi$, то $\sin\varphi<\varphi$; откуда следует, что $\sin\varphi-\varphi<0$ при $\varphi\in(0;\pi]$. Итак, если у функции $S$ и есть экстремум на этом интервале, то он может быть только максимумом, но никак не минимумом.

### А ведь школьники правы!

Следовательно, минимальное значение $S$ достигается на одном из концов отрезка $[0;\pi]$, и, значит, школьники дали совершенно правильный ответ, т.е. они правы.

Вот тебе и раз! Но ведь и то, что мы им возразили – тоже верно! Парадокс?

Нет, скорее – счастливый случай. В данной задаче школьникам просто повезло: неверное решение привело к верному ответу. Надо сказать, что такие случаи бывают не так уж и редко: наверное, каждый из своей практики что-нибудь да вспомнит в этом роде. А вообще-то эта статья написана, чтобы напомнить лишний раз: даже при применении самых наиочевидных и наинадежных методов (как, например, метод развертки при отыскании кратчайшего пути) надо быть осторожным и критически относиться к своим рассуждениям. Иначе можно попасть впросак.

Кстати, наше решение тоже не было полным. Ведь мы не рассмотрели пути муравья, изображенные на рисунке 4. Подумайте сами, как быть с ними!

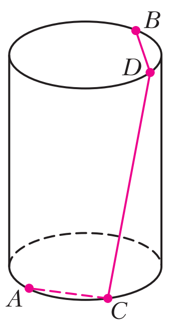



Рис. 4

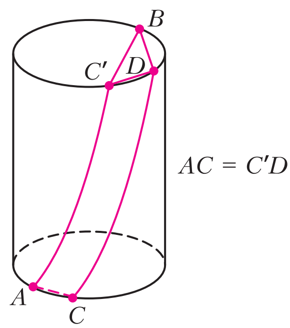



Рис. 5

**Ответ.** Длина пути $ACDB$ равна длине пути $AC'DB$ ( рис. 5). А этот путь длиннее, чем путь $AC'B$. Так что наш ответ правильный.

# Волны в мелкой тарелке (интерференция)

А.КОСОУРОВ

*Бросая в воду камешки, наблюдай круги, ими образуемые.*

Козьма Прутков

Нет в природе явления более универсального, чем распространение волн. Волны на поверхности воды, звук, свет, радио, передача деформации от одних частей твердого тела к другим – все это волновые процессы. Квантовая механика показывает, что и движением микрочастиц управляют волновые законы. Все эти волны имеют разную физическую природу, разные скорости распространения, разные частоты и длины волн. Но независимо от этого в движении любых волн много общего. Изучив законы распространения волн одной природы, можно большинство их них практически без изменения перенести на волны другого типа.

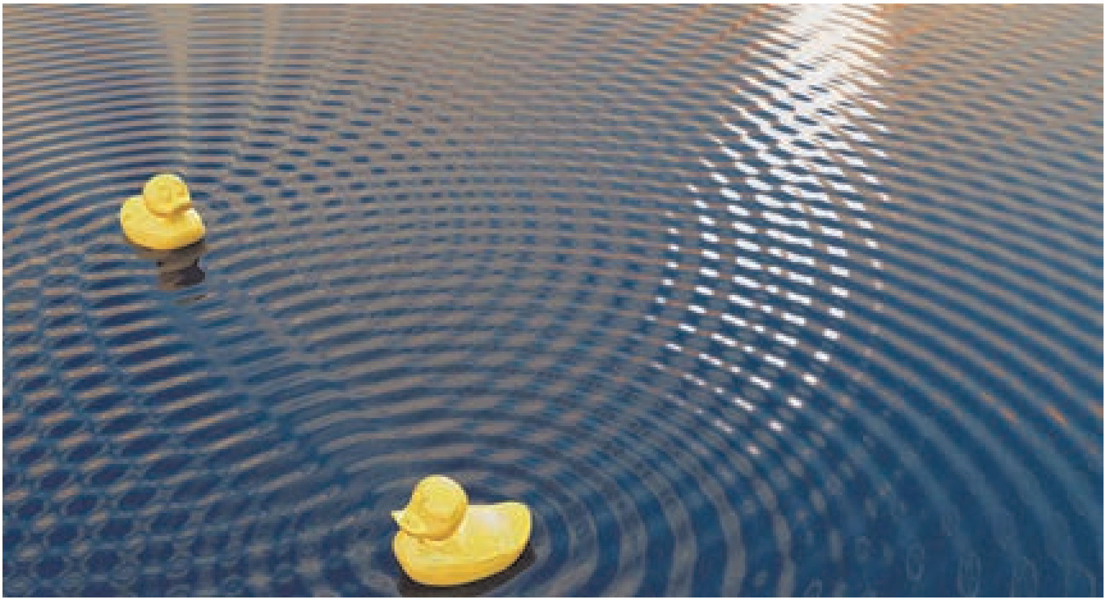
Опубликовано в «Кванте» №1 за 1971 год.

Практически изучать волны удобнее всего на поверхности воды.

Что такое волна? Бросьте в пруд камень. На спокойной горизонтальной поверхности пруда возникнут разбегающиеся круги. Точки поверхности воды, до которых дошла волна, начинают колебаться относительно своего равновесного положения. Это положение соответствует горизонтальной поверхности. Чем дальше находится точка от места падения камня, тем с большим запозданием «узнает» она о падении камня. Возмущение распространяется с определенной скоростью. Точки, до которых возмущение дошло одновременно, находятся в одинаковой стадии колебательного движения, т.е. в одинаковой фазе. Скорость перемещения этой фазы и есть скорость волны. Она измеряется в направлении нормали к фронту волны.

Для волн любой природы всегда можно указать физические объекты, которые под действием волны испытывают возмущение, т.е. отклонение от своих равновесных значений. Для звука – это периодические повышения и понижения давления. Для радиоволн и света – быстрые изменения напряженности электрического (и магнитного) поля.

Свойства всех без исключения сред таковы, что возмущение, возникшее в некоторой области, распространяется, передаваясь от точки к точке с конечной скоростью, которая



зависит от природы возмущения и свойств среды.

Для возникновения волны необходим источник возмущения, т. е. внешняя причина, вызывающая в некоторой области среды нарушение равновесия. Источник малого размера, например камень, брошенный в воду, излучает в однородной среде (т.е. в такой среде, в которой скорость волны не зависит от направления ее распространения) сферические волны (на поверхности воды – круговые), распространяющиеся по радиусам. Такие источники волн называют точечными.

Один из основных принципов элементарной волновой теории – принцип независимости волн, или принцип суперпозиции. Он утверждает, что возмущение, которое вызывает волна в точке наблюдения, не зависит от того, что через эту точку одновременно проходят другие волны. Принцип суперпозиции дает простое правило для нахождения суммарного действия волн от нескольких источников: суммарное колебание просто равно сумме колебаний, вызываемых каждым источником в отдельности.

Характерная особенность волновых процессов – интерференция волн. Интерференцией называют совокупность явлений, возникающих в среде при распространении волн от двух (или нескольких) источников, колеблющихся согласованно, т.е. синхронно. При этом оказывается, что в некоторых точках среды колебания, вызванные одновременным действием двух источников, будут сильнее или слабее, чем колебания, вызванные каждым источником в отдельности. Может случиться, что согласованные волны вообще погасят одна другую.

На первый взгляд явление интерференции противоречит принципу суперпозиции. Прежде чем обсуждать это, постараемся посмотреть на интерференцию собственными глазами. Искушенный глаз без труда увидит интерференцию при пересечении волн от двух брошенных в пруд камней. Однако для изучения интерференции этот способ не годится. Мы получим устойчивую интерференционную картину водяных волн на лабораторном столе (рис.1).

Прежде всего необходим сосуд с водой. Чтобы волны, отраженные от его стенок, не маскировали волн, идущих от источников, нужен сосуд с пологими стенками. В этом отношении хороша обыкновенная мелкая тарелка, в которую вода наливается почти до самого верха. Набегая на стенки, волны быстро затухают и почти не отражаются. Генератором волн может служить электрический звонок с отвинченным колпачком. К молоточку звонка прикрепите кусок проволоки, на ее конец наденьте пробковый шарик, который и будет точечным источником волн. Проводя опыты, следите за тем, чтобы провода были хорошо изолированы. Звонок нужно укрепить над тарелкой так, чтобы поворотом звонка можно было погружать пробковый шарик в воду у края тарелки. Питать звонок лучше всего через автотрансформатор. Это позволит регулировать амплитуду колебаний. Очень удобен автотрансформатор от детской железной дороги. Подойдет и трансформатор от прибора для выжигания. Включив устройство, мы увидим на поверхности воды круговые волны с расстоянием между соседними горбами, т.е. длиной волны, около 1 см.

*Рис. 1. Установка для наблюдения волн от одиночного источника*

Наблюдать волны лучше всего по тени на дне тарелки при прямом солнечном свете или свете яркой лампы. Каждая волна, действуя как цилиндрическая линза, дает на дне тарелки светлую полосу, повторяющую форму фронта волны. Однако волны, бегущие со скоростью около 10 см/с, сливаются для взгляда, фиксированного на неподвижной тарелке. Они видны только вблизи источника, где их амплитуда велика. Чтобы увидеть их на всей поверхности воды, нужно быстро поворачивать голову. Точно так же при быстрых движениях головы можно рассмотреть спицы катящегося колеса.

Очень эффектно наблюдать волны на матовом стекле фотоаппарата, особенно крупноформатного. Держа камеру в руках и плавно покачивая ее, легко добиться, чтобы волны были видны на всей поверхности. При этом кажется, что они бегут очень медленно. Можно смотреть на отражение поверхности воды и в зеркале. Легкие движения зеркала также делают волны видимыми по всей поверхности.

Но удобнее всего наблюдать волны при стробоскопическом освещении. Если освещать установку короткими вспышками света с частотой, равной частоте источника волн, то от одной вспышки до другой волны переместятся на одну длину волны и волновая картина волн будет казаться неподвижной. Такое освещение чрезвычайно легко осуществить. Достаточно параллельно обмоткам магнита звонка включить небольшую лампочку. С расстояния 0,5–1 м она хорошо и равномерно осветит установку, и неподвижная теневая картина волн будет хорошо видна. Для фотографирования лучше воспользоваться прямым солнечным светом.

Укрепите теперь на молоточке звонка согнутую из проволоки «вилку» с кусочками пробки на концах. Расстояние между концами вилки 2–3 см. Если концы будут опускаться в воду одновременно, получится два источника волн, колеблющихся не только синхронно, или в такт, но и синфазно, т.е. волны от обоих источников будут возникать в один и тот же момент времени. Картина будет примерно такой. От источников волн веером расходятся области больших амплитуд, разделенные областями «молчания». Центральная область больших амплитуд расположена перпендикулярно линии, соединяющей источники. Как области молчания, так и области больших амплитуд проходят между источниками.

Исследование интерференционной картины с линейкой покажет, что расстояние между двумя максимумами на линии, соединяющей источники, равно половине расстояния между двумя горбами, т.е. половине длины волны. Если изменить расстояние между источниками, то изменится и число полос большой амплитуды. Чем больше расстояние между источниками, тем больше «перьев» в нашем веере. Но расстояние между максимумами на линии, соединяющей источники, всегда равно половине длины волны. Поэтому общее число полос с максимальной амплитудой будет вдвое больше, чем число длин волн, укладывающееся на расстоянии между источниками. Отсюда следует, что если расстояние между источниками меньше половины длины волны, то интерференции вообще не будет. Такие источники действуют как один, давая одну систему круговых волн. Это можно увидеть, постепенно уменьшая расстояние между источниками. Обратите внимание еще и на то, что, продолжая в какой-нибудь области больших амплитуд фронт волны, проходящий через горб, мы в соседней области встретим впадину. Другими словами: при переходе через нулевую область фаза волны меняется на половину полного колебания.

Теперь представьте себе, что у нас не два молоточка, а два источника света, излучающих световые волны, и перпендикулярно поверхности воды мы помещаем экран. Мы увидим освещенные места, соответствующие пересечению экрана и областей с большой амплитудой, и темные, не освещенные места. Иными словами, мы увидим темные и светлые интерференционные полосы. О том, как осуществить интерференционный опыт в оптике, поговорим как-нибудь в другой раз, а сейчас попробуем объяснить то, что увидели. Нарисуем на листе бумаги обе системы волн так, словно они замерли в какой-то момент (рис.2). Горбы волн отметим красным цветом, а впадины – синим. Перенумеруем волны, отметив одинаковыми числами те,

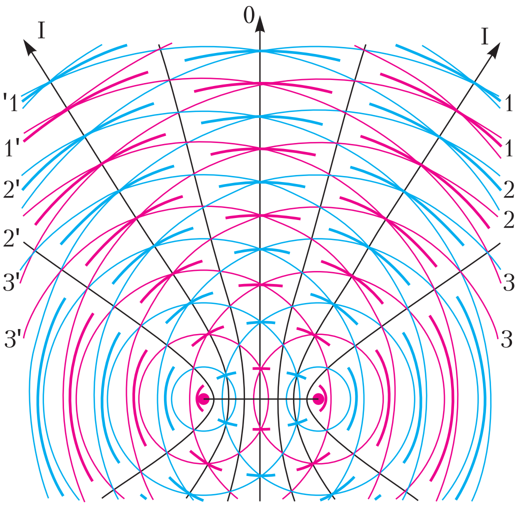



*Рис. 2. Сложение колебаний при интерференции волн от двух точечных источников. Красные линии – горбы, синие – впадины. Утолщенными дугами показаны результирующие волны*

которые вышли из источников одновременно. Из рисунка видно, что на линию, равноудаленную от источников, одновременно приходят волны, имеющие одинаковые номера. Это и понятно, так как до точек этой прямой волны прошли одинаковые пути. По принципу суперпозиции мы можем заключить, что на этой линии удвоятся как высоты горбов, так и глубины впадин. Правее и левее этой линии лежат точки, в которых горбы одной системы волн совпадут со впадинами другой. В то время как волны от одного источника вызовут в этих точках отклонение вверх, волны от другого в тот же момент вызовут в этих точках отклонение вниз. Суммарное отклонение в этих точках будет близко к нулю. Соединим все такие точки непрерывной черной линией. Если проследить за нумерацией горбов и впадин, легко заключить, что до всех точек правой линии левые волны проходят путь на половину длины волны больший, чем правые. Для левой линии на половину длины волны отстают правые волны.

Справа и слева от нулевых линий лежат точки пересечения первого горба со вторым, второго с третьим и т. д. Легко понять, что это тоже области максимумов. Соединив эти точки, мы получим линию, до точек которой одна система волны отстает от другой на одну длину волны.

Продолжая анализ чертежа, можно найти все нулевые линии и все линии максимумов. Линии, которые мы получили, математики называют гиперболами. (Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух точек – фокусов – постоянна.)

Теперь совершенно ясно, почему расстояние между максимумами на линии, соединяющей источники, равно половине длины волны. Действительно, в среднюю точку этой линии волны приходят в одинаковой фазе и усиливают друг друга. Если сместиться из этой точки на полдлины волны, то путь одной волны увеличится на половину длины волны, а другой – уменьшится на такую же величину. Разность хода между волнами в этой точке (разность путей, пройденных волнами от источников до точки) будет равна одной длине волны, и волны снова будут взаимно усиливаться. Так будет происходить через каждую половину длины волны.

Максимум, соответствующий нулевой разности хода, называют нулевым максимумом или нулевым порядком интерференции. Максимумы с разностью хода в одну длину волны – максимумами первого порядка интерференции и т. д. Максимальный порядок интерференции определяется целым числом, ближайшим к $2d/\lambda$, где $d$ – расстояние между источниками, а $\lambda$ – длина волны.

Теперь попробуйте проанализировать сами с помощью чертежа, а может быть, и проверить экспериментально, как изменится картина, если один из источников будет излучать волны с запозданием на половину периода или на какую-нибудь другую его часть. А если сдвиг между колебаниями будет меняться случайным образом? Для экспериментального осуществления волн со сдвигом фаз достаточно сделать концы вилки разной длины.

# Непрерывность дискретная и обычная

А.ОНОПРИЕНКО

### Дискретная непрерывность

Начнем с простой задачи.

**Задача 1.** *В ряд выписано несколько целых чисел, причем любые два соседних либо равны, либо отличаются на единицу. Первое число ряда равно* $-10$, *а последнее равно* $10$. *Докажите, что в этой последовательности есть число* $0$.

**Решение.** По существу, эта задача говорит о следующем: начав с целого отрицательного числа и сдвигаясь на один, мы не можем попасть в положительное число, «перескочив» при этом ноль. Это утверждение выглядит совсем очевидно, но все же аккуратно докажем его. Найдем в нашем ряду первое неотрицательное число (по условию неотрицательные числа в ряду присутствуют, а значит, можно взять первое из них). Может ли оно быть больше нуля? Нет, так как в этом случае предыдущее число обязано было бы быть неотрицательным, но мы взяли первое неотрицательное число в этом ряду. Значит, первое неотрицательное число равно нулю.

*Вопрос*. В каком месте предыдущего доказательства использовалось условие, что первое число ряда равно $-10$?

Похожим образом можно доказать более общее утверждение.

Статья написана по материалам математических кружков при МПГУ. Кружки открыты с 2016 года, а в 2018/19 и в 2019/20 учебных годах они получили поддержку Департамента образования города Москвы в рамках мероприятия «Детский университет МПГУ (организация работы кружков для московских школьников на базе МПГУ)».

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200203

**Дискретная теорема о промежуточном значении.** *Пусть имеется последовательность целых чисел, в которой любые два соседних числа или равны, или отличаются на единицу. Пусть $a$ – первый элемент последовательности, $b$ – последний. Тогда для любого целого числа $c$, лежащего между $a$ и $b$, найдется элемент последовательности, равный $c$.*

Приведем еще одну формулировку дискретной теоремы о промежуточном значении. Данная теорема в этой формулировке будет очень похожа на теорему о промежуточном значении для обычной непрерывности, которую мы обсудим ниже.

Заметим, что последовательность целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно трактовать как функцию, отображающую отрезок $[1; n]$ натурального ряда в целые числа. Если записать эту последовательность как $a(1), a(2), \ldots$ $\ldots, a(n)$, можно увидеть полную аналогию с последовательностью значений функции $a$ в точках $1, 2, \ldots, n$. Слова «$i$-й элемент последовательности» можно интерпретировать как «значение функции $a$ в точке $i$». (Правда, в данной терминологии функция $a$ определена лишь на натуральных числах, а не в любой действительной точке, как это бывает со многими функциями.) Можно обобщить это определение и считать, что функция $a$ определена не на числах $1, 2, \ldots, n$, а на числах $k, k+1, \ldots, n$. В данном случае это соответствует последовательности $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ (или $a(k), a(k+1), \ldots, a(n)$, если записать по порядку значения, которые принимает функция $a$ в точках $k, k+1, \ldots, n$).

**Дискретная теорема о промежуточном значении (переформулировка)**. *Пусть имеется функция $f$, определенная на натуральных числах $k, k+1, \ldots, n$ и принимающая целые значения. Известно, что для любого $x = k, k+1, \ldots, n-1$ значения $f(x)$ и $f(x+1)$ либо равны, либо отличаются на* $1$. *Пусть $A = f(k)$, $B = f(n)$. Тогда для любого целого $C$, лежащего между $A$ и $B$, найдется такое число $x$, что $f(x) = C$.*

Разберем еще несколько задач, применяя дискретную теорему о промежуточном значении.

**Задача 2.** *Первый тайм футбольного матча закончился со счетом* 0:1, *а второй* *тайм – со счетом* 4:3. *Докажите, что в некоторый момент счет на табло был ничейный.*

**Решение.** Рассмотрим последовательность, элементами которой являются разности между мячами, забитыми первой и второй командами. Первый элемент последовательности представляет собой разность в начале второго тайма, последний элемент – разность в конце второго тайма. Вместе с каждым забитым мячом появляется новый элемент последовательности (т.е. каждый элемент последовательности соответствует обновлению счета на табло). Так как первый элемент последовательности равен $-1$, последний равен 1 и каждые два соседних значения отличаются на 1, по дискретной теореме о промежуточном значении есть элемент последовательности, равный нулю. Этот элемент соответствует моменту, когда счет на табло был ничейным.

**Задача 3.** *В некоторой стране человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Докажите, что можно установить премьер-министру такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин.* (*Все зарплаты в стране различные. Считайте, что зарплата бывает любым вещественным числом.*)

**Решение.** Упорядочим по возрастанию все имеющиеся в стране зарплаты: $z_1, z_2, \ldots, z_n$, зарплату премьер-министра обозначим через $Z$. Определим последовательность натуральных чисел так: $a_k$ равно разности между количеством богатых мужчин и бедных женщин, если $z_k < Z < z_{k+1}$. Кроме того, $a_0$ (соответственно, $a_n$) равно той же разности, если $Z < z_1$ (соответственно, $Z > z_n$). При таком определении любые два соседних элемента последовательности $a_k$ и $a_{k+1}$ отличаются на 1, так как при соответствующем изменении зарплаты премьер-министра человек с зарплатой $z_{k+1}$ становится богатым, что уменьшает текущую разность на 1, если этот человек был женщиной, или увеличивает на 1, если он был мужчиной. Первый элемент последовательности соответствует ситуации, когда все люди в стране богатые (кроме самого премьера), и тогда $a_0 > 0$. Соответственно, последний элемент последовательности означает ситуацию, когда все люди бедные, и $a_n < 0$. По дискретной теореме о промежуточном значении существует такое $k$, что $a_k = 0$. Тогда установим зарплату премьер-министру, соответствующую этому значению $k$.

**Задача 4.** *На окружности отмечены* 77 *точек, среди которых нет диаметрально противоположных. Докажите, что можно провести диаметр через одну из этих точек так, что по обе стороны диаметра точек окажется поровну.*

**Решение.** Проведем диаметр окружности через произвольную отмеченную точку и раскрасим одну из половинок круга в синий цвет, а другую – в красный. Если в половинках поровну точек, то нужный диаметр найден. В противном случае определим последовательность следующим образом: $a_1$ равно разности между количеством отмеченных точек в синей части и красной части для данного положения диаметра. Будем постепенно поворачивать диаметр вокруг центра окружности (раскрашенные половинки круга поворачиваются вместе с ним) и каждый раз, когда с диаметра уходит отмеченная точка либо попадает на него, мы записываем новый элемент последовательности (который тоже равен разности между количеством отмеченных точек в синей части и красной части). Последний элемент последовательности соответствует такому положению диаметра, когда он снова проходит через первую отмеченную точку. В этом положении диаметр поворачивается на $180°$, а синяя и красная половинки меняются местами. Следовательно, последний элемент последовательности противоположен первому, т.е. один из них положителен, а второй – отрицателен. Так как любые два соседних элемента последовательности отличаются на 1, по дискретной теореме о промежуточном значении найдется элемент последовательности, равный нулю. Осталось заметить, что этот элемент последовательности соответствует положению диаметра, проходящему через одну из отмеченных точек, так как общее количество точек нечетно.

Наконец, обсудим еще один тип дискретной непрерывности. Представим себе кузнечика, который прыгает по прямой вперед или назад. Прыжки кузнечика по длине не превосходят некоторого числа $C$. И если между точками старта и финиша пути имеется лужа длиной хотя бы $C$, то кузнечик обязательно попадет в лужу. Запишем это наблюдение в виде теоремы.

**Дискретная теорема о промежуточном значении (еще одна переформулировка)**. *Пусть имеется последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, любые два соседних элемента которой отличаются не более чем на $C$. Кроме того, пусть $x$ и $y$ – такие числа, что $y - x \geq C$ и отрезок $[x; y]$ содержится в отрезке $[a_1; a_n]$ (или $[a_n; a_1]$, если $a_n < a_1$). Тогда существует элемент последовательности, лежащий в отрезке $[x; y]$.*

Этот вариант дискретной теоремы о промежуточном значении доказывается почти так же, как ее предыдущая версия: считая для определенности, что $a_1 \leq x \leq a_n$, рассмотрите первое число последовательности, которое не меньше $x$.

**Задача 5.** *Имеется 25 кусков сыра разного веса. Всегда ли можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, что части разрезанного куска окажутся в разных пакетах, веса пакетов будут одинаковы и число кусков в пакетах также будет одинаково?*

**Решение.** Покажем, что так всегда можно будет сделать. Отложим самый большой по весу кусок в сторону (пусть его вес равен $m_{25}$), а остальные 24 куска произвольно разложим в два пакета по 12 кусков. Отметим следующий факт: если суммарный вес сыра в первом пакете отличается от суммарного веса сыра во втором пакете менее чем на $m_{25}$, то можно разрезать отложенный кусок на две части и уравнять веса пакетов. Действительно, если первый пакет тяжелее второго на $\Delta m < m_{25}$, то разрежем отложенный кусок на части весом $\dfrac{m_{25} - \Delta m}{2}$ и $\dfrac{m_{25} + \Delta m}{2}$ и положим первую часть в первый пакет, а вторую – во второй.

Значит, осталось показать, что можно устроить так, чтобы веса первого и второго пакетов отличались менее чем на $m_{25}$ и при этом в каждом пакете было по 12 кусков. Пусть веса кусков в первом пакете равны $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$, а во втором пакете – $b_1, b_2, \ldots, b_{12}$. Если суммарные веса пакетов отличаются менее чем на $m_{25}$, то все доказано. Если же нет, то будем для определенности считать, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{12} + m_{25} \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_{12}$. Организуем последовательное перекладывание: сначала обменяем местами куски $a_1$ и $b_1$, затем – куски $a_2$ и $b_2$ и т.д. Отметим, что так как отложенный кусок имеет максимальный вес среди всех, то после каждого перекладывания разность весов первого и второго пакетов меняется не более чем на $m_{25}$. А так как в начале процесса эта разность была не более $-m_{25}$, в конце процесса (когда мы поменяли местами все куски) – не менее $m_{25}$ и идем мы шагами не более $m_{25}$, то по второму варианту дискретной теоремы о промежуточном значении мы обязательно попадем в отрезок $\left[-\dfrac{m_{25}}{2}; \dfrac{m_{25}}{2}\right]$. На этом шаге веса пакетов отличаются менее чем на $m_{25}$, и, как было показано выше, можно совершить требуемое разрезание отложенного куска.

### Обычная непрерывность

Возьмем карандаш и начнем рисовать, не отрывая его от бумаги. В результате мы получим некоторую непрерывную линию. Многие функции, которые изучаются в школе, имеют график, который можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги: например, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ и другие. График такой функции (называемой *непрерывной*) выглядит как линия, которая не имеет разрывов. (Отметим, что мы не даем точное определение непрерывной функции – ведь для этого требуется объяснить, что такое линия, не имеющая разрывов! На самом деле в математике определение линии, которую можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги, приводится через определение непрерывной функции, а не наоборот.) Функция $y = \dfrac{1}{x}$, определенная во всех точках, кроме 0, имеет две ветви, каждую из которых можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги, и она тоже непрерывна на своей области определения. В отличие от функций из предыдущего раздела эти функции определены на бесконечных множествах, и поэтому дискретная теорема о промежуточном значении для них не подходит. Рассмотрим следующее «определение» непрерывной функции, которое удобно использовать в задачах. Интуитивно оно означает, что функция не совершает резких скачков и изменяется плавно.

**«Определение».** *Функция* $y = f(x)$ *непрерывна на своей области определения, если при малых изменениях значения аргумента мало меняется значение функции.*

Почему слово «определение» взято в кавычки? Дело в том, что написанный выше текст не является определением в строгом смысле. В самом деле, это значит «мало меняется»? Однако этому «определению» можно придать точный смысл, что делают в университетском курсе математического анализа. В этом же курсе доказывают следующую теорему о промежуточном значении. Ее формулировка очень похожа на дискретную теорему о промежуточном значении, но ее доказательство значительно сложнее и потому остается за рамками статьи.

**Теорема о промежуточном значении.** *Пусть числовая функция* $f$ *определена на отрезке* $[a;b]$ *и непрерывна на этом отрезке. Пусть* $f(a) = A$, $f(b) = B$. *Тогда для любого числа* $C$, *лежащего между* $A$ *и* $B$, *найдется такое число* $x$, *что* $f(x) = C$.

*Замечание*. Приведенное выше «определение» непрерывной функции можно вполне строго применить к функциям, которые мы вводили для переформулировки дискретной теоремы о промежуточном значении. Для этого под словом «мало» нужно понимать «не более чем на единицу».

**Задача 6.** *В противоположных углах квадратного пруда со стороной* 100 *метров сидели два гуся. Поплавав по пруду, они оказались в двух соседних углах. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между кончиками их клювов было равно* 110 *метрам.*

**Решение.** Пусть гуси плавали от момента времени $t_1$ до момента времени $t_2$. Рассмотрим функцию $f$, ставящую в соответствие моменту времени $t$ расстояние между кончиками клювов гусей в этот момент. Эта функция будет непрерывной: гуси плавают без резких скачков, и поэтому за малое изменение времени расстояние между ними поменяется на малую величину. Так как $f(t_2) = 100\sqrt{2} < 110$, а $f(t_2) = 100 < 110$, то по теореме о промежуточном значении найдется такой момент $t$, что $f(t) = 110$.

**Задача 7.** *Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно одним прямолинейным разрезом разбить на два равновеликих многоугольника.*

**Решение.** Поместим многоугольник между двумя параллельными прямыми $a$ и $b$, не пересекающими этот многоугольник. Пусть $d$ – расстояние между этими прямыми. Для каждого $x \in [0;d]$ можно провести прямую $c_x$, параллельную $a$ и $b$, лежащую между этими прямыми и расстояние от которой до $a$ будет равно $x$. Рассмотрим функцию $f$, которая по числу $x$ определяет площадь части многоугольника, лежащую между прямыми $a$ и $c_x$. Эта функция непрерывна: при малых изменениях $x$ прямая $c_x$ будет сдвигаться на небольшое расстояние, и площадь части многоугольника между $a$ и $c_x$ тоже мало изменится. Так как $f(0) = 0$, $f(d) = S$ – площади многоугольника, найдется такое $x = x_0$, что $f(x_0) = \frac{S}{2}$. Тогда прямая $c_{x_0}$ будет искомой.

**Задача 8.** *В противоположных концах диаметра* $AB$ *окружности сидят два таракана. По команде они побежали по окружности в одном направлении (например, против часовой стрелки) и через минуту поменялись местами (движение тараканов не обязательно равномерное). Докажите, что в какой-то момент соединяющая их хорда была перпендикулярна диаметру* $AB$.

**Решение.** Пусть тараканы бежали от момента времени $t_1$ до $t_2$. Для всех моментов времени $t$ между ними (не включая $t_1$ и $t_2$) определим следующую функцию $f$. Пусть $C_t$, $D_t$ – положения первого и второго таракана соответственно, $O_t$ – точка пересечения $AB$ и $C_tD_t$. Значение функции $f(t)$ равно градусной мере угла $AOC_t$. В моменты времени $t$, близкие к $t_1$, значение функции $f(t)$ близко к $0°$. А в моменты времени $t$, близкие к $t_2$, значение функции $f(t)$ близко к $180°$. Кроме того, функция $f$ непрерывна, поскольку положение точек $C_t$, $D_t$ и $O_t$ меняется непрерывно. А значит, согласно теореме о промежуточном значении, существует момент времени $t$, когда $f(t) = 90°$.

*Вопрос*. Почему функция $f$ не определена в точках $t_1$ и $t_2$?

### Задачи для самостоятельного решения

**9.** В ряд стоят 20 сапог: 10 правых и 10 левых. Докажите, что найдутся 10 сапог, стоящих подряд, среди которых поровну правых и левых.

**10.** Грани восьми единичных кубиков окрашены в черный и белый цвета так, что черных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб $2\times2\times2$, на поверхности которого черных и белых квадратиков поровну.

**11.** В некоторых клетках квадрата $50\times50$ стоят числа 1 и $-1$, причем сумма всех чисел не больше 100 и не меньше $-100$. Докажите, что есть квадрат $25\times25$, абсолютная величина суммы чисел в котором не превосходит 25.

**12.** Дан выпуклый многоугольник и точка а) вне, б) внутри него. Докажите, что его можно разбить на две равновеликие части прямой, проходящей через заданную точку.

**13.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0;1]$. Докажите, что на этом отрезке найдется такое число $x$, что

$$\frac{1}{n}\left(\left|x-x_1\right|+\left|x-x_2\right|+\ldots+\left|x-x_n\right|\right)=\frac{1}{2}.$$

### Список литературы для дальнейшего изучения


1. *С.Табачников*. Соображения непрерывности. – «Квант», 1987, №9.

2. *А.Д.Блинков, В.М.Гуровиц*. Непрерывность. – М.: МЦНМО, 2015.

3. *А.В.Шаповалов*. Принцип узких мест. – М.: МЦНМО, 2008.


# Вокруг точки на медиане

***Д.ПРОКОПЕНКО, Д.ШВЕЦОВ***

В этой статье нас ждет обзорная экскурсия от древнегреческих шедевров геометрии до задач современных олимпиад. Мы постараемся проследить, как непростые задачи наших дней перекликаются с находками древних.

На заочном туре IX Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина была предложена такая задача (автор – Ф.Ивлев).

**Задача 1.** *Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается сторон $BC$, $CA$, $AB$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Перпендикуляр из центра $I$ этой окружности на медиану $CM$ пересекает прямую $A_1B_1$ в точке $K$ (рис.1). Докажите, что $CK \parallel AB$.*

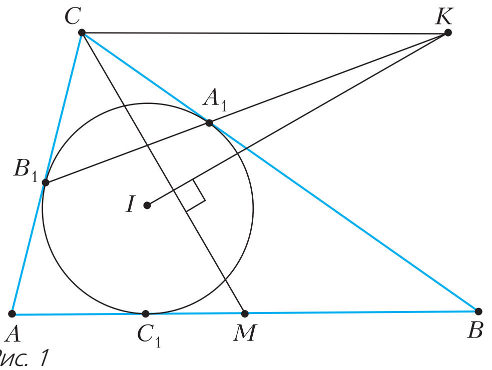



*Рис. 1*

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20200204

Несмотря на простую и интересная формулировку, так сразу и не ясно, как к задаче подступиться. Решение же из книги [1] использует полярное преобразование, методы проективной геометрии, понятие бесконечно удаленной точки – требуется эрудиция. Неужели к задаче с таким элегантным условием нет более простого подхода? Есть! Оказывается, эта задача является вариацией следующего классического факта [2]:

**Теорема 1.** *Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается сторон $BC$, $CA$, $AB$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Пусть прямая $C_1I$ пересекает прямую $A_1B_1$ в точке $P$ (рис.2). Тогда прямая $CP$ содержит медиану треугольника $ABC$.*

Давайте сначала с помощью этой теоремы решим задачу 1, а затем докажем и саму теорему.

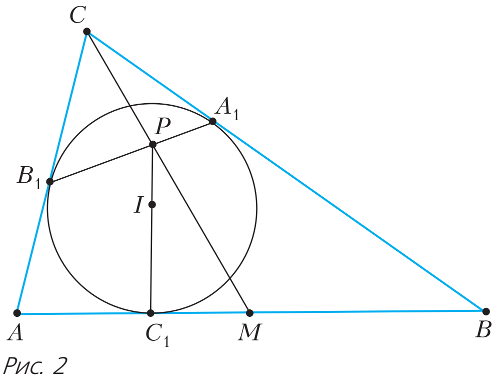



*Рис. 2*

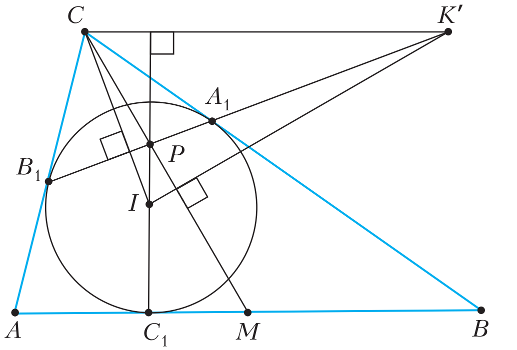



Рис. 3

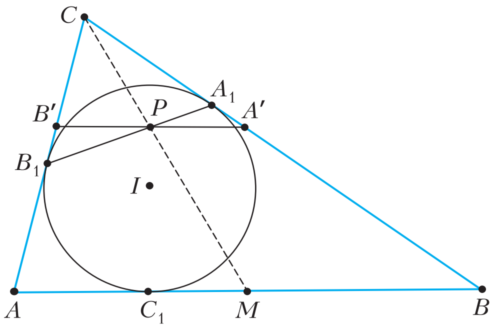



Рис. 5

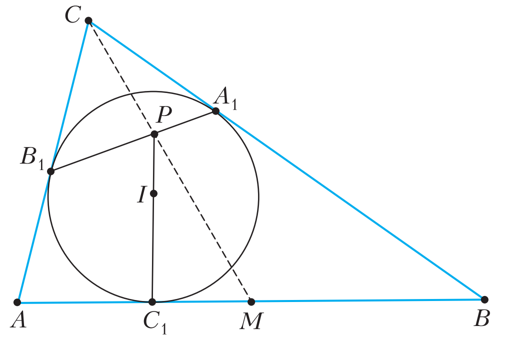



Рис. 4

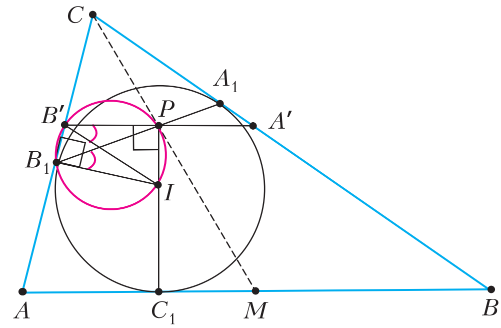



Рис. 6

**Решение.** Пусть прямая $A_1B_1$ и прямая, проведенная через вершину $C$ параллельно $AB$, пересекаются в точке $K'$ (рис.3). Покажем, что точка $K'$ совпадает с точкой $K$ из условия.

Рассмотрим треугольник $CIK'$. Заметим, что точка $P$ – ортоцентр треугольника $CIK'$. Следовательно, прямая $CP$ содержит третью высоту. Тогда прямая $IK'$ перпендикулярна отрезку $CM$, который по основной задаче является медианой треугольника $ABC$. Прямая $IK'$ удовлетворяет условию задачи, значит, точки $K$ и $K'$ действительно совпадают, что и завершает решение.

Теперь давайте вернемся к теореме 1 и докажем ее.

**Доказательство теоремы 1.** Итак, у нас имеется точка $P$ – точка пересечения прямых $IC_1$ и $A_1B_1$, – которую мы хотим «усадить» на медиану $CM$ (рис.4). Для этого проведем через точку $P$ прямую, параллельную прямой $AB$. Таким образом мы связываем точку $P$ с точками $A_1$ и $B_1$. Итак, пусть прямая, параллельная прямой $AB$, проходящая через точку $P$, пересекает стороны $AC$ и $BC$ в точках $B'$ и $A'$ соответственно (рис.5).

Теперь заметим, что точки $B_1$, $B'$, $P$, $I$ лежат на одной окружности, так как $\angle IB_1B' = \angle B'PI = \angle 90°$ (рис.6). Это дает нам равенство углов $IB_1P$ и $IB'P$, ибо оба угла опираются на дугу $PI$. Точно такими же рассуждениями можно убедиться, что углы $PA_1I$ и $PA'I$ равны. С другой стороны, мы знаем, что треугольник $A_1IB_1$ равнобедренный, а стало быть, $\angle IA_1B_1 = \angle IB_1A_1$, но тогда и $\angle IB'A' = \angle IA'B'$. Выходит, мы доказали, что треугольник $A'IB'$ равнобедренный, а отрезок $IP$ в нем высота ($A'B' \parallel AB$), следовательно, $A'P = PB'$. Но раз прямая $CP$ делит отрезок $A'B'$ пополам, то и параллельный ему отрезок $AB$ поделится прямой $CP$ на равные части, что и завершает доказательство теоремы 1.

Оказывается, что такой подход к задаче 1 связывает ее с другой жемчужиной геометрии – *прямой Симсона*.

**Теорема 2.** *Из точки $D$ опустим перпендикуляры $DA_1$, $DB_1$ и $DC_1$ на прямые $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно (рис.7). Тогда точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ лежат на одной прямой (называемой прямой Симсона) в том и только том случае, когда точка $D$ лежит на описанной окружности треугольника $ABC$.*

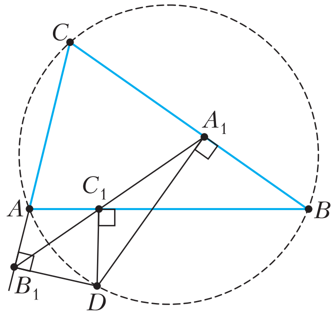


*Рис. 7*

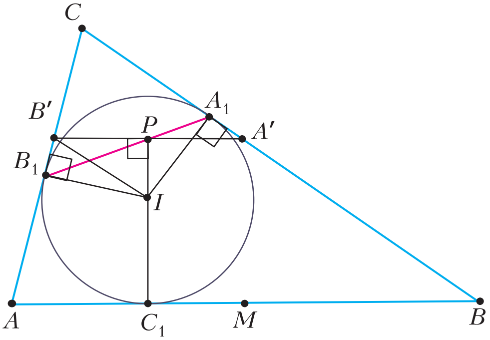


*Рис. 8*

Доказательство этого утверждения уже несколько раз появлялось на страницах «Кванта», например на первой странице статьи [3]. Тут мы его воспроизводить не будем.

Вооружившись прямой Симсона, вернемся к доказательству теоремы 1. На рисунке 8 мы видим, что точки $A_1$, $B_1$ и $P$ – проекции точки $I$ на прямые, содержащие стороны треугольника $A'B'C$. Поскольку точки $A_1$, $B_1$ и $P$ лежат на одной прямой, то по теореме 2 точка $I$ лежит на описанной окружности треугольника $A'B'C$. Поскольку $CI$ – биссектриса угла $C$, а $I$ – середина дуги $A'IB'$, то $P$ – середина $A'B'$ ($IP$ – высота в равнобедренном треугольнике $A'IB'$).

Тем самым, использование прямой Симсона позволяет по-новому взглянуть на решение задачи 1. Отметим, что такая скрытая прямая Симсона в задачах – не такое уж редкое явление.

## Немного истории

Здесь мы можем остановиться и немного отдохнуть. Оказывается, у задачи 1 есть своя история. Недавно первому автору этой статьи попал в руки старый номер журнала «Математика в школе» за 1996 год. Выяснилось, что в том же году на Всероссийской олимпиаде в 10 классе была дана наша

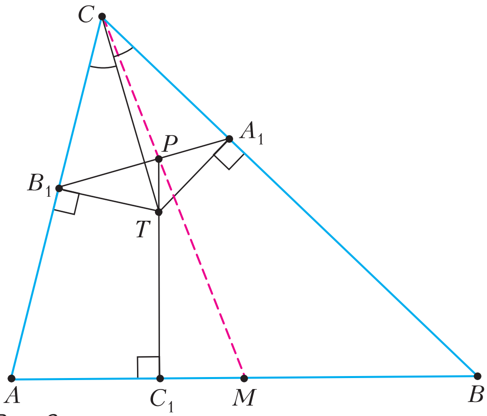


*Рис. 9*

задача 1 в других обозначениях. В журнале приводились два решения этой задачи. Первое – векторное, чисто вычислительное – занимало примерно половину страницы печатного текста, второе использовало свойства проективного преобразования и двойных отношений. Стало интересно, а есть ли более доступные геометрические решения. Плоды этих размышлений перед вами.

Теперь вернемся из 1996 года более чем на 20 лет назад, в 1973 год. Итак, «Задачник «Кванта», задача М178, автор – Игорь Федорович Шарыгин. Здесь задача 1 дана в более общем виде: вместо центра вписанной окружности можно рассматривать любую точку на биссектрисе! Оказывается, что сама окружность ни при чем. Для удобства формулировку дадим в наших обозначениях.

**Задача 2** (обобщение задачи 1). *Из некоторой точки $T$ биссектрисы угла $C$ треугольника $ABC$ опустим перпендикуляры $TA_1$, $TB_1$ и $TC_1$ на его стороны $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно. Пусть $P$ – точка пересечения прямых $TC_1$ и $A_1B_1$ (рис.9). Докажите, что $CP$ делит сторону $AB$ пополам.*

**Упражнение.** Решите эту задачу.

*Указание.* Используйте задачу 1.

И наконец, более века назад в фундаментальной книге Д.Ефремова «Новая геометрия треугольника» [1], опубликованной в 1902 году (рис.10), была помещена теорема, совпадающая с задачей И.Ф.Шарыгина с точностью до обозначений. Вообще книгу Д.Ефремова можно рекомендовать всем любителям геометрии. Она содержит богатейший теоретический обзор геометрии треугольника.

НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ
ТРЕУГОЛЬНИКА.

Составилъ
кандидатъ физ.-математическихъ наукъ,
преподаватель школы колористовъ
при Иваново-Вознесенскомъ реальномъ училищѣ
Д. Ефремовъ*.

ОДЕССА.
1902.

Дозволено цензурою. Одесса. 9 іюля 1901 г.

Рис. 10

Итак, мы видим, что основная задача только в России была переоткрыта не менее трех раз.

Интересно, что Дмитрий Дмитриевич Ефремов окончил Санкт-Петербургский университет со званием кандидата физико-математических наук, был награжден золотой медалью. В возрасте 28 лет в 1887 году он был назначен учителем математики в Иваново-Вознесенское реальное училище с предоставлением ему уроков черчения, строительного искусства и землемерия в механико- и химико-технических отделениях VII дополнительного класса. Удивительное место для кандидата наук, закончившего университет с золотой медалью. В 1897 году Дмитрий Дмитриевич перемещен штатным преподавателем механики и математики в школу колористов при Иваново-Вознесенском реальном училище (ивановская промышленность в те годы была на подъеме).

На этом закончим историческое отступление и вернемся к задачам.

Задача 1 перекликается с классическим шедевром Архимеда, который уже не раз появлялся на страницах журнала «Квант».

**Задача 3** (формула Архимеда, M1000). *Вокруг треугольника $ABC$ описана окружность. Из точки $W$ – середины дуги $AB$, не содержащей $C$, опустили перпендикуляр $WK$ на прямую $BC$ (рис.11). Пусть $CA = b$, $CB = a$. Тогда $CK = \dfrac{a+b}{2}$.*

Знание формулы Архимеда подскажет нам, как решить еще одну непростую задачу.

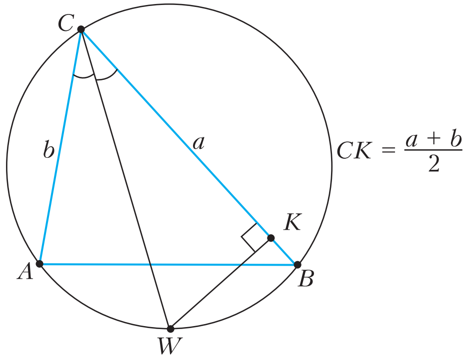



Рис. 11

**Задача 4** (Математическое многоборье, СУНЦ МГУ, 2010). *В неравнобедренном треугольнике $ABC$ отметили точку пересечения медиан $G$ и точку пересечения биссектрис $I$ (рис.12). Оказалось, что прямая $GI$ перпендикулярна стороне $AB$. Докажите, что $AC + BC = 3AB$.*

Из задачи 1 следует, что точка $G$ лежит на пересечении медианы и отрезка, соединяющего точки касания $A'$ и $B'$ вписанной окружности со сторонами $CB$ и $CA$ соответственно.

Проведем через точку $G$ прямую $A_1B_1$, параллельную $AB$, где $A_1 \in CA$, $B_1 \in CB$ (см. рис.12). Получим треугольник $A_1CB_1$, подобный треугольнику $ABC$ с коэффициентом $\dfrac{CG}{CM} = \dfrac{2}{3}$.

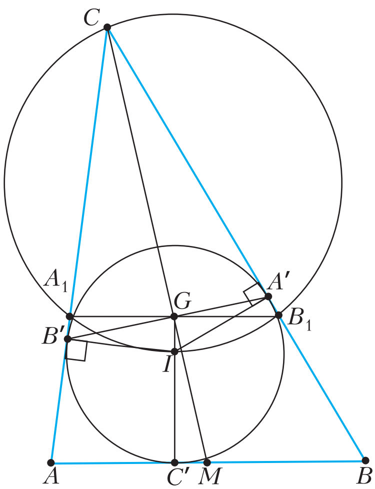



Рис. 12

Мы знаем, что точки $C$, $A_1$, $I$ и $B_1$ лежат на одной окружности. Поскольку $CI$ – биссектриса угла $ACB$, то $I$ – середина дуги $A_1B_1$. Имеем

$$CA' = \frac{CB_1 + CA_1}{2} = \frac{\frac{2}{3}CB + \frac{2}{3}CA}{2} = \frac{CB + CA}{3}. \qquad (1)$$

В первом равенстве мы воспользовались *формулой Архимеда*, а во втором – подобием треугольников $A_1CB_1$ и $ACB$.

Остается воспользоваться тем, что длину касательной из вершины $C$ в любом треугольнике можно найти по формуле

$$CA' = p - AB, \qquad (2)$$

где $p$ – полупериметр треугольника $ABC$. Приравнивая правые части формул (1) и (2), получим, что $AC + BC = 3AB$.

Треугольники, у которых прямая $GI$ перпендикулярна стороне треугольника, обладают еще одним интересным свойством.

**Задача 5** (А.Карлюченко, финал VIII Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина). *Пусть $G$ и $I$ – точки пересечения медиан и биссектрис неравнобедренного треугольника $ABC$, а $r$ – радиус вписанной в него окружности* (*рис.*13). *Докажите, что $GI = \frac{r}{3}$ тогда и только тогда, когда прямая $GI$ перпендикулярна одной из сторон треугольника.*

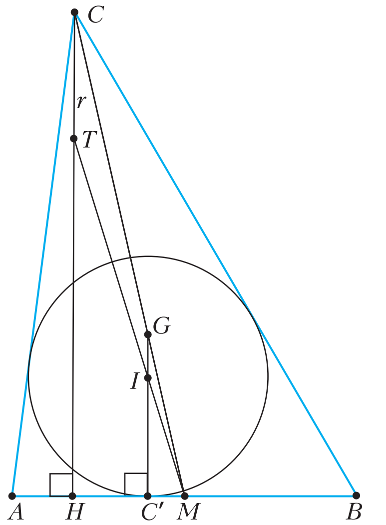


Рис. 13

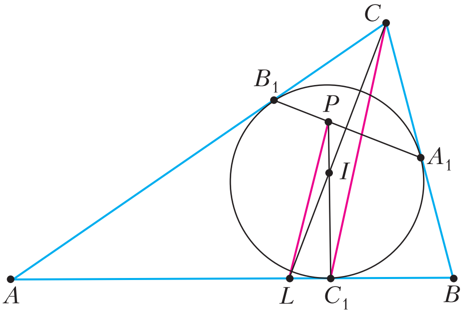


Рис. 14

Классические факты напоминают маяки, на которые можно ориентироваться в бурном олимпиадном море Надеемся, что наша небольшая прогулка с обзором геометрических шедевров, древних и современных, прошла с пользой. Теперь же приглашаем читателя, наряду с задачей А.Карлюченко (тут вам поможет рисунок 13, содержащий подсказки), решить следующую красивую задачу.

**Задача 6** (Л. Емельянов, С. Берлов, Олимпиада ФМЛ 239, 2005 г.). *Вписанная окружность треугольника $ABC$ с центром $I$ касается сторон $AB$, $BC$, $CA$ в точках $C_1$, $A_1$, $B_1$ соответственно* (*рис.*14). *Обозначим через $L$ основание биссектрисы угла, а через $P$ – точку пересечения прямых $C_1I$ и $A_1B_1$. Докажите, что $PL \parallel CC_1$.*

### Список литературы

1. *Д.Ефремов.* Новая геометрия треугольника. – Одесса, 1902 г. Электронная версия: http://zadachi.mccme.ru/ngt/

2. *А.В.Акопян.* Геометрия в картинках. – М., 2011. Электронная версия: https://users.mccme.ru/akopyan/papers/RuGeoFigures.pdf

3. *Д.Швецов.* От прямой Симсона к теореме Дроз-Фарни. – «Квант», 2009, №6.

4. *А.А.Заславский.* Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина (2010–2014). – М.: МЦМНО, 2015.

5. Задачи на сайте http://zadachi.mccme.ru/

6. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина на сайте geometry.ru

# Физические аналогии

**С.КОЗЕЛ**

Среди разнообразных явлений различной физической природы нередко можно встретить похожие явлении, обнаруживающие одинаковые признаки и закономерности. В таких случаях говорят о физических аналогиях, или аналогичных (т.е. похожих) системах. Физические аналогии, существующие между электрическими, механическими, акустическими и другими системами, давно с успехом используются при исследованиях и расчетах. Методы, основанные на применении аналогий, в ряде случаев оказываются весьма плодотворными при решении задач. Они позволяют сводить решения некоторых задач к решениям других, уже известных задач (зачастую из другого раздела физики).

Например, нельзя пройти мимо аналогии между законом всемирного тяготения и законом Кулона. Выражения для силы тяготения между двумя материальными точками массами $M$ и $m$ и для силы электростатического взаимодействия двух точечных зарядов $Q$ и $q$ имеют вид

$$F_{\text{т}} = G\frac{Mm}{r^2} \text{ и } F_{\text{эл}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}.$$

Здесь $G$ – гравитационная постоянная, $\varepsilon_0$ – электрическая постоянная, $r$ – расстояние между взаимодействующими телами. Поскольку силы выражаются похожими формулами (в обоих случаях силы обратно пропорциональны квадрату расстояния), движение материальной точки в гравитационном поле (в поле тяготения) и движение заряженного тела в поле точечного заряда описываются одинаковыми уравнениями. Правда, есть и отличие. Гравитационные силы всегда стремятся сблизить тела (притяжение тел), а электрические силы в зависимости от знаков взаимодействующих зарядов могут дать как притяжение, так и отталкивание.

Опубликовано в «Кванте» №11 за 1975 год.

Понимание аналогии между законом всемирного тяготения и законом Кулона часто помогает при решении задач. Например, мы знаем, что потенциал поля точечного заряда $Q$, т.е. потенциальная энергия единичного положительного электрического заряда в электрическом поле, выражается формулой

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

По аналогии можно записать выражение для потенциальной энергии единичной массы в гравитационном поле точечной массы $M$, т.е. для гравитационного потенциала, в виде

$$\psi = -G\frac{M}{r}.$$

Появление знака минус связано с тем, что в случае сил притяжения потенциальная энергия оказывается отрицательной. (Напомним, что потенциальная энергия полагается равной нулю при бесконечно большом $r$.) Последним выражением (для гравитационного потенциала) удобно пользоваться при решении многих задач из области космической физики (например, задача о вычислении второй космической скорости, задачи о маневрах космических кораблей и т.п.).

Приведем еще один пример физической аналогии между механической и электрической системами. Процессы, происходящие в электрическом колебательном контуре, аналогичны колебаниям груза на пружине (рис.1). Системы являются аналогичными потому, что явления, происходящие в них, описываются одинаковыми математическими соотношениями.

Второй закон Ньютона для груза на пружине и закон Ома для колебательного контура записываются одинаковым образом.

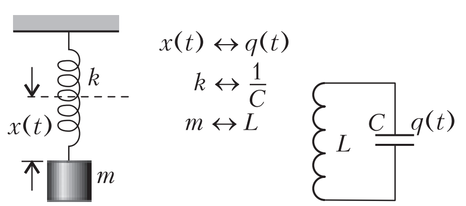



*Рис. 1. Эти колебательные системы физически аналогичны*

А именно

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -kx, \quad L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -\frac{1}{C}q,$$

где $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ – скорость груза, $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ – ток в контуре. Отсюда видно, что масса груза $m$ может быть сопоставлена с индуктивностью катушки $L$, жесткость пружины $k$ – с обратной величиной емкости $\frac{1}{C}$. Аналогия этих двух систем сохраняется и при наличии рассеяния энергии: коэффициент вязкого трения $\beta$ при небольших скоростях движения тела в жидкости или газе аналогичен электрическому сопротивлению $R$ цепи.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач, решения которых существенно упрощаются, если воспользоваться методом аналогий.

**Задача 1.** U-*образная трубка частично заполнена жидкостью. Сечение трубки везде одинаково; общая длина заполненной части трубки равна l. Определите период колебаний уровня жидкости в такой системе.*

Попытаемся провести аналогию с известной задачей о колебаниях груза, подвешенного на пружине, и таким образом найти период колебаний данной колебательной системы.

Пусть уровень жидкости в одном из колен понизился на $x$, а в другом, соответственно, повысился на $x$ (рис.2). Тогда разность

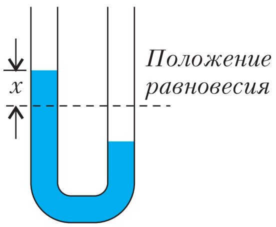



Рис. 2. Еще одна колебательная система

уровней будет равна $2x$, и на жидкость в левом колене будет действовать некомпенсированная сила тяжести столба жидкости высотой $2x$, равная

$$F = -2S\rho g x.$$

Здесь $S$ – площадь сечения трубки, $\rho$ – плотность жидкости. Знак минус в этой формуле означает, что сила $F$ стремится вернуть систему в положение равновесия (как и в случае груза на пружине). Величина $2S\rho g$, постоянная для данной системы, соответствует жесткости пружины $k$. Таким образом, движение жидкости происходит под действием квазиупругой[1] силы. Аналогия с задачей о колебаниях груза на пружине становится очевидной. Используя формулу для периода $T$ колебаний груза массой $m$ на пружине жесткостью $k$, получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{Sl\rho}{2S\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Теперь мы сформулируем несколько задач из различных разделов физики и попробуем понять аналогию между ними.

**Задача 2.** *Определите работу, затраченную на деформацию пружины жесткостью $k$, если ее удлинение (считая от положения равновесия нерастянутой пружины) изменилось от $x_1$ до $x_2$.*

**Задача 3.** *Какую работу надо совершить, чтобы изменить заряд конденсатора емкостью C от значения $q_1$ до значения $q_2$?*

**Задача 4.** *Один моль идеального газа расширяется при нагревании так, что объем связан с температурой по закону $T = \alpha V^2$, где $\alpha$ – некоторая постоянная величина. Какую работу совершит газ в этом процессе при изменении его температуры от $T_1$ до $T_2$?*

Системы, о которых идет речь в этих задачах, изображены на рисунке 3. Задачи являются аналогичными, поскольку во всех

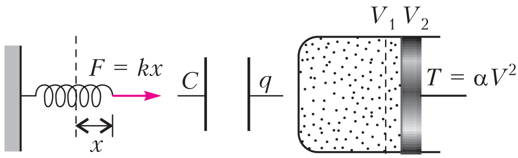



Рис. 3. Механическая, электрическая и тепловая системы, в которых работы выражаются аналогичными соотношениями

трех случаях мы сталкиваемся с одинаковыми закономерностями. Разберемся в этом более подробно.

В задаче 2 нужно найти работу по деформации пружины. Эту работу можно определить графическим методом. Работа на малом участке пути $\Delta x$ (т.е. на таком участке, что силу $F = kx$ можно считать постоянной) есть

[1] Так принято называть силы неупругого происхождения, изменяющиеся по тому же закону, что и упругая сила пружины: $F = -kx$.

$$\Delta A = F\Delta x = kx\Delta x.$$

Значит, полная работа $A$ при изменении координаты от $x_1$ до $x_2$ равна заштрихованной площади на рисунке 4:

$$A = \frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right).$$

Напомним, что величина $\frac{kx^2}{2}$ есть потенциальная энергия $\Pi$ упруго деформированной

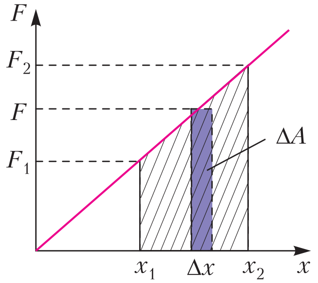



*Рис. 4. Графическое определение работы*

пружины. Зная выражение для этой энергии, мы могли бы сразу написать формулу для работы ($A = \Delta\Pi$). Но мы хотим здесь убедиться в том, что подобная ситуация возникает и в других физически аналогичных задачах.

При решении задачи 3 процесс зарядки конденсатора можно представить следующим образом. Заряд достаточно малыми порциями $\Delta q$, такими, что разность потенциалов $u$ на конденсаторе можно считать постоянной, переносится с одной обкладки на другую. Работа по переносу заряда $\Delta q$ запишется в виде

$$\Delta A = u\Delta q = \frac{1}{C}q\Delta q.$$

Выражение для $\Delta A$ имеет тот же вид, что и в задаче 2. По аналогии, не повторяя хода решения, мы можем сразу написать, что полная работа по изменению заряда на конденсаторе равна

$$A = \frac{1}{2C}\left(q_2^2 - q_1^2\right).$$

Величина $\frac{q^2}{2C}$ аналогична потенциальной энергии пружины $\frac{kx^2}{2}$ и имеет смысл электрической энергии, запасенной в конденсаторе.

В задаче 4 требуется определить работу газа при расширении. Если взять достаточно малое изменение объема $\Delta V$, такое, чтобы давление в этом элементарном процессе можно было с хорошим приближением считать постоянным, то работа запишется в виде $\Delta A = p\Delta V$. Поскольку в нашем случае $T = \alpha V^2$, то из уравнения газового состояния получаем

$$p = \frac{RT}{V} = R\alpha V.$$

Следовательно,

$$\Delta A = R\alpha V\Delta V.$$

Теперь аналогия с задачами 2 и 3 становится очевидной, и мы можем записать выражение для полной работы $A$ при расширении газа:

$$A = \frac{R\alpha}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{R}{2}\left(T_2 - T_1\right).$$

Рассмотрим теперь еще одну, несколько более сложную задачу.

**Задача 5.** *Какое количество теплоты $Q$ получает один моль идеального газа при изменении температуры от $T_1$ до $T_2$ ($T_2 > T_1$), если в процессе нагревания объем газа изменяется обратно пропорционально температуре: $V = \frac{\beta}{T}$, где $\beta$ – некоторая постоянная величина? Теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V$ задана.*

Прямое решение этой задачи довольно громоздко. Мы обратим здесь внимание на неожиданную аналогию этой тепловой задачи с известной задачей о потенциале поля точечного заряда.

На основании первого закона термодинамики можно записать

$$Q = \Delta U + A.$$

Здесь $\Delta U$ – изменение внутренней энергии газа, $A$ – работа, совершенная газом. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры: $U \sim T$. Поэтому изменение внутренней энергии в любом процессе, а значит и в нашем случае, такое же, как и в процессе при постоянном объеме, когда все подведенное тепло идет только на увеличение внутренней энергии:

$$\Delta U = C_V\left(T_2 - T_1\right).$$

Таким образом, задача свелась к вычислению работы, произведенной газом. Для отыскания этой работы рассмотрим сначала элементарный процесс, в котором объем газа увеличивается на достаточно малую величину $\Delta V$, так что давление остается практически неизменным. Для элементарной работы мы можем написать

$$\Delta A = p\Delta V = \frac{RT}{V}\Delta V = R\beta\frac{\Delta V}{V^2}. \quad (1)$$

Нам нужно найти работу газа при изменении его объема от значения $V_1 = \frac{\beta}{T_1}$ до значения $V_2 = \frac{\beta}{T_2}$. Математически задача свелась к операции интегрирования, выходящей за рамки программы средней школы. Попробуем, однако, вспомнить, не встречались ли мы с подобной постановкой вопроса в других задачах.

В каких случаях элементарная работа оказывается пропорциональной выражению $\frac{\Delta x}{x^2}$? Очевидно, если речь идет о работе силы, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния, на малом перемещении $\Delta x$. Мы знаем две силы, изменяющиеся пропорционально $\frac{1}{x^2}$: это сила кулоновского взаимодействия точечных зарядов и гравитационная сила. Таким образом, рассматриваемая тепловая задача аналогична задаче о потенциале поля точечного электрического заряда или задаче о вычислении потенциальной энергии тела в гравитационном поле. Методы решения этих задач изучаются в средней школе.

Вот пример электрической задачи, из которой немедленно следует решение задачи 5.

**Задача 6.** *Найдите емкость сферического конденсатора, образованного двумя концентрическими проводящими сферами с радиусами $R_1$ и $R_2$.*

Емкость конденсатора $C$ равна отношению заряда конденсатора $q$ к разности потенциалов $\Delta\varphi$ между его обкладками. Разность потенциалов (по определению) равна работе, совершаемой электрическими силами при перемещении единичного положительного заряда с одной обкладки на другую.

Пусть внутренняя сфера конденсатора имеет заряд $q$, а наружная имеет заряд $-q$. Тогда электрическое поле в пространстве между сферами совпадает с полем точечного заряда $q$, расположенного в их общем центре, и напряженность поля равна

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad R_1 \le r \le R_2.$$

Пусть единичный положительный заряд переместился на малое расстояние $\Delta r \ll R_1$ (так что поле можно считать однородным). Работа, совершаемая электрическим полем на этом участке пути, есть

$$\Delta A = E\Delta r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta r}{r^2}. \quad (2)$$

Полная работа $A$ электрических сил при изменении расстояния от $R_1$ до $R_2$ может быть выражена через потенциал поля точечного заряда:

$$A = -(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \\ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}. \quad (3)$$

Отсюда емкость сферического конденсатора равна

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Вернемся теперь к задаче 5 и доведем ее решение до конца, воспользовавшись результатами задачи 6. Сравним выражение (1) для элементарной работы при расширении газа и выражение (2) для элементарной работы по перемещению единичного заряда в электростатическом поле. Нетрудно видеть, что эти выражения аналогичны (в задаче 5 переменной величиной является объем газа $V$, а в задаче 6 – расстояние $r$). Это позволяет сделать вывод о том, что и полные работы $A$ в обоих случаях выражаются одинаковым образом через переменные $V$ и $r$ соответственно. Поэтому по аналогии с выражением (3) можно записать выражение для работы газа при изменении его объема от $V_1$ до $V_2$:

$$A = R\beta\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2}.$$

Принимая во внимание, что $V = \frac{\beta}{T}$, получим

$$A = R\frac{\frac{V_2}{\beta} - \frac{V_1}{\beta}}{\frac{V_1}{\beta}\frac{V_2}{\beta}} = R\frac{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2}} = -R(T_2 - T_1).$$

Знак минус в этой формуле определяется тем, что в рассматриваемом процессе происходит сжатие газа ($A < 0$).

Теперь можно записать окончательный результат решения задачи 5. Количество теплоты, которое нужно сообщить одному молю газа, чтобы изменить его температуру от $T_1$ до $T_2$, равно

$$Q = (C_V - R)(T_2 - T_1).$$

В этой статье мы хотели проиллюстрировать значение физических аналогий. Следует, однако, иметь в виду, что аналогии бывают разные. На рисунке 1 изображены системы, между которыми имеется глубокая физическая аналогия. Аналогичными оказываются процессы, протекающие в этих двух физически разных системах. Аналогии такого рода называются динамическими. Динамически аналогичные системы описываются одинаковыми уравнениями движения. Роль таких систем в науке особенно значительна. Другим примером динамической аналогии являются задача о движении спутника Земли и задача о движении электрона в резерфордовской модели атома водорода.

Наряду с такими глубокими физическими аналогиями большой интерес представляют и случаи формальной аналогии. К этой категории можно отнести примеры, разобранные в задачах 5 и 6. В этих задачах мы не изучали динамику систем и не рассматривали процессы, протекающие во времени. Задачи сводились к вычислению определенной физической величины (работы). Мы лишь обратили внимание на то, что в обоих случаях силы, производящие работу, подчиняются одинаковым закономерностям. Это позволило использовать для решения тепловой задачи известное из школьной программы выражение для потенциала поля точечного заряда.

### Упражнения

**1.** В вертикально расположенном цилиндре под тяжелым поршнем массой $m$ и площадью $S$ находится один моль идеального газа. Используя аналогию с грузом на пружине, определите период малых колебаний поршня относительно положения равновесия, предполагая температуру газа неизменной и равной $T_0$. Атмосферное давление равно $p_а$.

Какой смысл вкладывается здесь в понятие малых колебаний? Какую еще колебательную систему, аналогичную грузу на пружине только при малых колебаниях, вы знаете?

**2.** Попытайтесь придумать механическую систему, которая была бы динамически аналогична электрической цепи, изображенной на рисунке 5. Цепь состоит из конденсатора емкостью $C$, первоначальный заряд которого равен $q_0$, и сопротивления $R$. Ключ $K$ замыкается в некоторый момент времени.

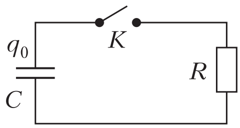



*Рис. 5. Надо придумать механическую аналогию этой электрической цепи*

### Из записной книжки экзаменатора

Рентгеновская трубка состоит из стеклянного баллона, наполненного вакуумом.

* * *

Источники света разделяются на два лагеря: естественные и искусственные.

* * *

Единица частоты – герц – названа в честь ученого, открывшего эту единицу.

* * *

Индуктивность измеряется в генрях.

* * *

Чем дальше находится предмет от линзы, тем изображение будет действительнее, чем ближе, тем мнимее.

* * *

Линзы бывают двояковыпуклые и однояковыпуклые.

* * *

Атом сложен и он долго морочил голову ученым.

* * *

Все окружающие нас предметы: столы, стулья и т. д. давят на нас с силой, равной своему весу.

* * *

У нормальных людей зрение хорошее, как вблизи, так и на большом расстоянии.

* * *

Гамма-лучи имеют большую проницательность.

* * *

Насыщенные пары отличаются от ненасыщенных тем, что они уже насытились.

* * *

Луч красного цвета самый длинный, а луч фиолетового – самый короткий.

* * *

Угловая скорость выражается в омегах.

Опубликовано в «Кванте» №1 за 1971 год.

# Муниципальный этап LIV Всероссийской олимпиады школьников по физике

## Задачи олимпиады

9 класс

**1. Все наоборот**

Система, состоящая из подвижного блока, тонкой нити, рычага со шкалой и точечного груза массой $m$, находится в равновесии в жидкости с плотностью $\rho$ (рис.1). Массами блока, нити и рычага можно пренебречь.

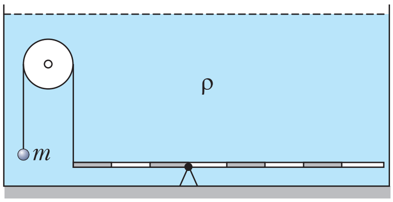



Рис. 1

1) Для каждого тела (блока, рычага и груза) сделайте отдельный рисунок с расстановкой всех сил, действующих на него.

2) Определите объемы блока и рычага.

*К.Кутелев*

**2. Температура проводника**

При пропускании тока от источника постоянного напряжения через длинную цилиндрическую проволоку ее установившаяся температура будет на $\Delta T_1$ выше температуры окружающей среды. Если проволоку пластично (объем не изменяется) вытянуть в длину в 2 раза и подключить к тому же источнику напряжения, то ее установившаяся температура будет на $\Delta T_2$ выше температуры окружающей среды. Определите отношение $\Delta T_2/\Delta T_1$.

*В.Яворский*

**3. Двойной контур**

Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке 2, состоит из резисторов сопротивлениями $R$ и $2R$, идеального источника постоянного напряжения $U_0 = 5{,}6$ В и идеального амперметра. Сопротивление $R = 2{,}0$ кОм.

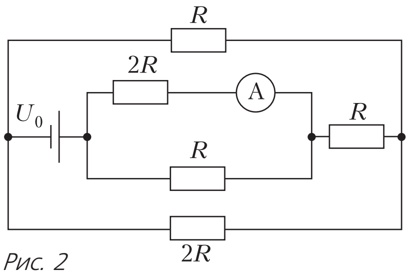



Рис. 2

1) Определите показание амперметра.

2) Определите показание идеального вольтметра, если его включить в цепь вместо амперметра.

*В.Слободянин*

**4. Область видимости**

В архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой был изображен точечный источник света $S_0$, плоское зеркало $M$ и частично линии $a$ и $b$, ограничивающие область видимости изображения источника в зеркале. От времени чернила выцвели и зеркала не стало видно (рис.3). Построением восстановите положение зеркала и его размер.

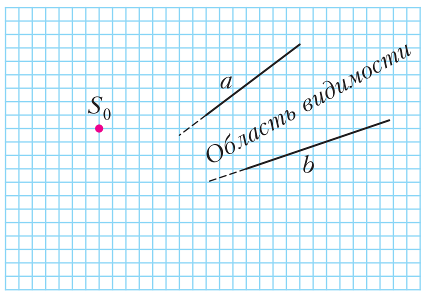



Рис. 3

*В.Слободянин*

**5. В потолок**

Во время тренировки в спортивном зале Петя заметил, что если он бросает мяч вертикально вверх со скоростью $v_0$, то мяч возвращается к нему через время $\tau = 2$ с. Но если скорость броска увеличить до $3v_0/2$, то время, через которое возвращается мячик, не изменяется. Чему равна скорость $v_0$? На какой высоте $h$ над точкой броска находится в зале потолок? Удар о потолок можно считать упругим. Ускорение свободного падения равно $g$.

*М.Замятнин*

10 класс

**1. Фрагмент цепи**

Фрагмент разветвленной электрической цепи представлен на рисунке 4. Показание вольтметра $V_1$ равно 10 В, вольтметра $V_3$

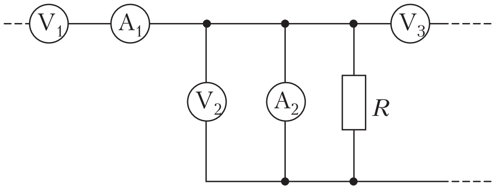



*Рис. 4*

равно 50 В, миллиамперметра $A_1$ равно 20 мА, миллиамперметра $A_2$ равно 40 мА, сила тока, протекающего через резистор $R$, равна 20 мА. Вычислите сопротивление резистора $R$. Все вольтметры одинаковые.

*В.Слободянин*

**2. В разнос**

Частица движется в плоскости $x$, $y$. Ее скорость вдоль оси $y$ увеличивается от нулевой с постоянным ускорением $a_y = 0{,}10$ м/с$^2$,


*Рис. 5*

а вдоль оси $x$ изменяется так, как показано на рисунке 5. Найдите максимальные значения модулей ускорения и скорости частицы.

*М.Замятнин*

**3. Летающий ваттметр**

На некоторой планете устройство массой 1 кг, которое умеет измерять мгновенную мощность силы тяжести, бросили с поверхности под углом 30° к горизонту. В таблице

| $t$, с | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$, Вт | −45 | −39 | −34 | −30 | −25 | −21 | −15 |

представлены значения измеренной мощности в разные моменты времени. Найдите время и дальность полета устройства. Силу сопротивления воздуха и изменение ускорения свободного падения не учитывайте.

*Л.Колдунов*

**4. Всё наоборот**

Система, состоящая из двух подвижных блоков, тонких нитей, рычага со шкалой и точечных грузов массами $m$ и $2m$, находится в равновесии в жидкости с плотностью $\rho$ (рис.6). Массами блоков, нитей и рычага можно пренебречь.

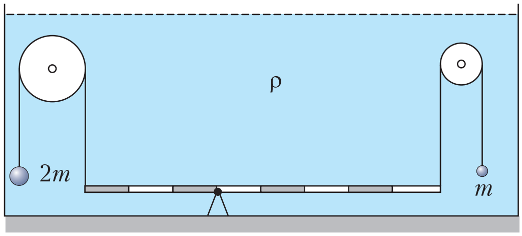



*Рис. 6*

1) Сделайте рисунок с расстановкой всех сил, действующих на каждое из тел (блоки, рычаг, грузы).

2) Определите объемы блоков и рычага.

*К.Кутелев*

**5. Столкновение**

Система, состоящая из двух одинаковых брусков массой $m$ каждый, соединенных недеформированной пружиной жесткостью $k$, движется по гладкому горизонтальному столу со скоростью $v_0$ и налетает на покоящийся брусок массой $m/2$ (рис.7). Удар центральный и абсолютно упругий. Найдите:

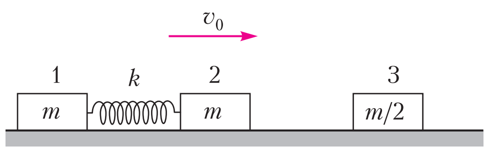



*Рис. 7*

1) скорость $v_3$ покоившегося бруска сразу после столкновения;

2) максимальную деформацию $\Delta L$ пружины.

*В.Слободянин*

11 класс

**1. В туннеле**

На горизонтальной поверхности на расстоянии $l$ друг от друга расположены две параллельные вертикальные стенки. У противоположных стенок лежат два одинаковых маленьких шарика, связанные слабо натянутой нитью (рис.8). Зазор между шариками и стенками мал. Нить, соединяющая

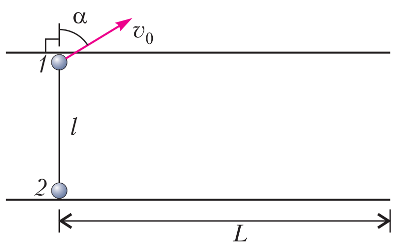



Рис. 8

шарики, перпендикулярна стенкам. Шарики находятся на расстоянии $L \gg l$ от краев стенок. На шарик *1* воздействуют «щелчком» (коротким импульсом силы), в результате чего он приобретает скорость $v_0$, направленную под углом $\alpha$ к нити ($\operatorname{tg}\alpha = 2$). Соударения шариков со стенками абсолютно упругие. Трение в системе отсутствует. Нить легкая и нерастяжимая.

1) Найдите скорость $v_{20}$ шарика *2* сразу после щелчка.

2) Через какое время $t_1$ нить вновь окажется натянутой?

2) Через какое время $t_2$ шарики достигнут правого края стенок?

*А.Уймин*

**2. Кольцо, бусинки, пружина**

Вдоль тонкого кольца радиусом $R$ и массой $2m$ могут скользить 2 бусинки массой $m$ каждая. Бусинки соединены пружиной жесткостью $k$. В начальный момент кольцо удерживают на горизонтальной поверхности, прижимая к вертикальной стенке, а бусинки находятся в неустойчивом равновесии на его диаметре. На рисунке 9 показан вид сверху. После небольшого толчка бусинки начинают двигаться от стенки. В момент, когда расстояние от бусинок до стенки достигает максимального значения $1{,}6R$, кольцо отпускают. Определите:

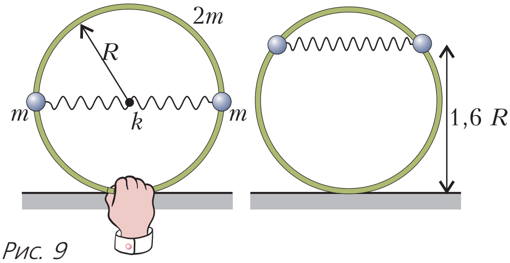



Рис. 9

1) длину $l$ недеформированной пружины;

2) максимальную скорость $v$ бусинок при движении от стенки;

3) расстояние от бусинок до стенки, когда они опять окажутся на диаметре.

Трения в системе нет.

*К.Кутелев*

**3. На Луне**

В горизонтальном цилиндре находятся два одинаковых подвижных поршня с пружинами, отличающимися по жесткости в 2 раза (рис.10,*а*). Когда между поршнями газа нет, пружины не деформированы. В пространство между поршнями закачивают идеальный газ. Через некоторое время расстояние между поршнями стало равным $l_0 = 6$ см (рис.10,*б*). Определите, на сколько сместится каждый поршень, если температуру газа медленно увеличить в 2 раза. Трения в системе нет. Атмосферным давлением на Луне пренебречь.

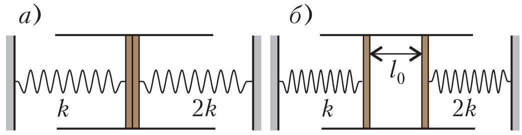



Рис. 10

*К.Кутелев*

**4. Властелин кольца (бусинка)**

Маленькая бусинка массой $m$ и зарядом $+q$ может скользить без трения по непроводящему незаряженному кольцу радиусом $R$ (рис.11). В плоскости кольца на расстоянии $h$ от центра кольца ($h < R$) закреплен заряд $+Q$. В начальный момент скорость бусинки равна $v_0$.

1) Какой максимальной скоростью будет обладать бусинка в процессе движения?

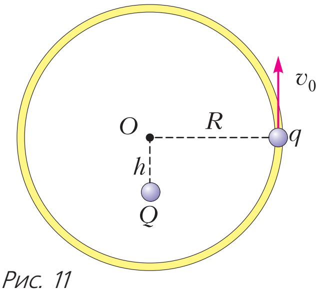


Рис. 11

2) На каком расстоянии от заряда $Q$ она будет находиться в этот момент?

3) С какой силой при этом кольцо действует на бусинку?

4) При какой начальной скорости бусинка сделает полный оборот?

Силой тяжести пренебречь. Кольцо неподвижно.

*М.Клепиков*

**5. Электродинамика**

Частица с зарядом $q = 1{,}2$ мкКл и массой $m = 0{,}8$ мг движется со скоростью

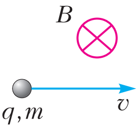


Рис. 12

$v = 100$ м/с в однородном электромагнитном поле с индукцией $B = 1$ мТл и напряженностью $E = 0$. На рисунке 12 показано направление скорости частицы $\vec{v}$ в рассматриваемый момент времени. Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен $\vec{v}$ и направлен от нас. Описание ситуации сделано относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Перейдем в другую инерциальную систему отсчета, движущуюся относительно первой со скоростью $\vec{v}$.

1) Определите направление и величину ускорения частицы $\vec{a}'$ в рассматриваемый момент во второй системе отсчета.

2) Определите направление и величину напряженности поля $\vec{E}'$ во второй системе отсчета.

*И.Иоголевич*

*Публикацию подготовил В.Слободянин*

# XXVI Международная олимпиада «Туймаада»

## Физика

В июле 2019 года в Якутске прошла XXVI Международная олимпиада школьников «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии.

Участники олимпиады по физике соревновались как обычно в двух лигах: старшей и младшей (жюри распределяет участников по лигам в зависимости от их возраста и класса). Олимпиада в каждой лиге состояла из двух туров: теоретического и экспериментального. Согласно программе олимпиады по физике участникам могут быть предложены задачи на любые темы, содержащиеся в углубленной школьной программе (в младшей лиге – за исключением тем, относящихся к выпускному классу).

Авторы оригинальных задач (как теоретических, так и экспериментальных) могут присылать их методической комиссии (achudn@mail.ru) – лучшие задачи войдут в итоговый комплект и после олимпиады будут опубликованы в образовательных журналах.

Статья подготовлена на основании методического пособия: *А.В. Чудновский, Р.Е. Аванесян, А.Б. Акимов, С.Д. Варламов, А.Р. Зильберман, В.И. Плис, М.Ю. Ромашка, А.А. Шеронов.* XXVI Международная олимпиада «Туймаада». Физика. Теоретический тур. Методическое пособие / под ред. А.В. Чудновского. – М.-Якутск, 2019.

Ниже представлены теоретические задачи для старшей лиги и список победителей олимпиады.

## Теоретический тур

### Старшая лига

**Задача 1. Трение по максимуму**

Горизонтальная плоскость разделена на две полуплоскости – гладкую и шероховатую. Однородная линейка массой $m$ и длиной $L$, скользившая со скоростью $v_0$ по гладкой части вдоль прямой, перпендикулярной границе раздела, наезжает на шероховатую часть с коэффициентом трения $\mu$. Найдите максимальный модуль мощности $N_{\max}$ силы трения, действующей на линейку, и момент времени $t_{\max}$, когда он достигается, считая от начала пересечения линейкой границы между полуплоскостями.

**Задача 2. Вода и пар**

В жестком сосуде находится вода массой $m_0 = 11$ г и ее насыщенный пар массой $m = 10$ г при температуре $T = 100$ °С. Найдите общую теплоемкость $C$ системы. При температуре $T$ известны удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · °С) и удельная теплота испарения воды $\lambda = 2{,}3$ МДж/кг, а малые относительные изменения давления $\Delta p/p$ и температуры $\Delta T/T$ насыщенного пара связаны соотношением $\Delta p/p = \alpha \Delta T/T$, где $\alpha = 13$.

**Задача 3. Силовая линия**

В некоторой точке $A$, находящейся на большом расстоянии от однородно заряженного отрезка длиной $L$, вектор напряженности электрического поля образует малый угол $\alpha$ с прямой, параллельной отрезку. Найдите расстояние $x$ между ближайшим к точке $A$ концом отрезка и точкой пересечения отрезка с силовой линией, проходящей через точку $A$.

**Задача 4. Глубина резкости**

Объектив диаметром $D = 1$ см и фокусным расстоянием $F = 2$ см дает на пленке максимально резкое изображение предмета, расположенного на расстоянии $a$ от объектива. На каких расстояниях (укажите $a_{\min}$ и $a_{\max}$) располагаются предметы, которые на том же кадре оказались изображены достаточно резко, если размер зерна пленки (или пикселя, если бы это был цифровой фотоаппарат) равен $d = 10$ мкм? Проведите расчеты для двух частных случаев: $a_1 = 12$ м и $a_2 = 60$ м.

**Задача 5. Колебания на свету**

Тонкостенный цилиндр радиусом $R = 10$ см из материала с поверхностной плотностью $\sigma = 80$ г/м$^2$ подвешен за центр основания на очень тонкой нити в вакууме и находится в широком горизонтальном потоке света интенсивностью $I = 1$ кВт/м$^2$. Боковая поверхность цилиндра разделена параллельными оси цилиндра отрезками на две половины, одна из которых отражает весь падающий свет, а вторая – поглощает его. Оцените период $T$ малых крутильных колебаний цилиндра с амплитудой $\varphi_0 = 0{,}12$.

## Победители олимпиады

Младшая лига

*Kaldybaev Rauan*, Казахстан – диплом I степени,

*Alexander Goo Zong Han*, Сингапур – диплом I степени,

*Serikbayev Islamkhan*, Казахстан – диплом II степени,

*Ersen Andrei-Ovidiu*, Румыния – диплом II степени,

*Pitebay Yersultan*, Казахстан – диплом III степени,

*Дмитриев Николай*, Россия, Республика Саха (Якутия) – диплом III степени,

*Новиков Станислав*, Россия, Республика Саха (Якутия) – диплом III степени,

*Кулаковский Айяр*, Россия, Республика Саха (Якутия) – диплом III степени.

Старшая лига

*Zaharachescu Mihail-Marian*, Румыния – диплом I степени,

*Ghita Antonia-Alma*, Румыния – диплом I степени,

*Burlacu Eduard-Florin*, Румыния – диплом I степени,

*Васильев Артем*, Россия, Республика Саха (Якутия) – диплом II степени,

*Кайдапов Жамсо*, Россия, Республика Бурятия – диплом II степени,

*Cotirlan Claudiu-Mihai*, Румыния – диплом III степени,

*Yanchenko Alexey*, Казахстан – диплом III степени,

*Ho Li Xiong Timothy*, Сингапур – диплом III степени,

*Унаров Айтал*, Россия, Республика Саха (Якутия) – диплом III степени.

*Публикацию подготовили*
*А.Чудновский, Ю.Григорьев*

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## О стихотворных размерах

**1.** а) Такое слово не может содержать двух сильных слогов, и поэтому его ударный слог обязан быть сильным. б) Поскольку никакое слово не содержит более одного сильного слога, наше условие принимает вид: если слово содержит сильный слог, то его ударный слог совпадает с этим сильным слогом.

**2.** а) Если слово содержит более одного слога, то оно содержит как сильный слог ямба, так и сильный слог хорея. Значит, его ударный слог должен быть сильным слогом как ямба, так и хорея, но таких слогов нет. б) Аналогично предыдущему, никакое слово не содержит сильных слогов обоих размеров. Тогда никакое слово не содержит и двух сильных слогов одного размера, потому что между сильными слогами одного размера обязательно присутствует сильный слог другого размера. Значит, в строке слов не меньше, чем сильных слогов двух размеров, т.е. не меньше 6.

**3.** Если слово, содержащее 4-й слог, не односложно, то оно содержит 3-й или 5-й слог, т.е. содержит сильный слог хорея. Значит, ударный слог этого слова должен быть сильным слогом хорея и дактиля, а следовательно, слово содержит 1-й или 7-й слог.

**4.** а) Сильных слогов нет – условие выполняется автоматически. б) В строке имеется единственный сильный слог, номер которого равен $k$ и не зависит от $n$.

**5.** а) Хорей. б) Нечетные строки – анапест, четные – модифицированный анапест (с ударениями на 3-м, 6-м, 10-м и 13-м слогах). в) Анапест (впрочем, нечетные строки содержат только $5 < 3 + 3$ слогов). г) (5, 3)-размер. д) (5, 3)-размер (хотя 1-я и 5-я строки содержат только $7 < 5 + 3$ слогов).

## Конкурс имени А.П.Савина

(*см. «Квант» №11 за 2019 г.*)

**9.** Да.

Пусть за 16 кругов Пети Вася прошел $a$ кругов, а за 16 кругов Васи Петя прошел $b$ кругов. Отношение их скоростей равно $\frac{16}{a} = \frac{b}{16}$, т.е. $ab = 16 \cdot 16 = 2^8$, откуда оба числа $a$ и $b$ – степени двойки. Петя едет быстрее Васи, поэтому $b > 16$. Значит, $b$ делится на 16. Пока Вася проезжает 1 круг, Петя проезжает $\frac{b}{16}$ кругов и оказывается в точке старта.

**10.** Да.

Можно разрезать квадраты даже на 4 части. Возможные решения показаны на рисунке 1.

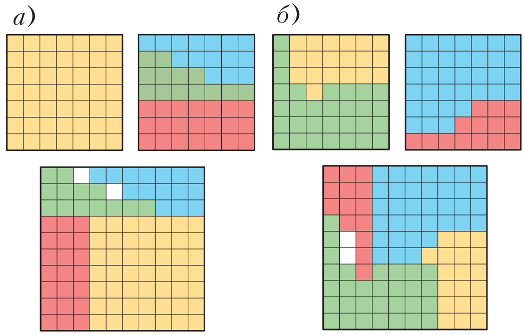



*Рис. 1*

Решение *а* прислала ученица 8 класса Владислава Сушкова (г.Сыктывкар). Решение *б* сообщил Владимир Расторгуев.

**11.** Рассмотрим искомую равнобокую трапецию $ABCD$. Она симметрична относительно общего серединного перпендикуляра $l$ к ее основаниям $AD$ и $BC$ (рис.2). Пусть при этой симметрии данная окружность $\omega$ переходит в окружность $\omega_1$.

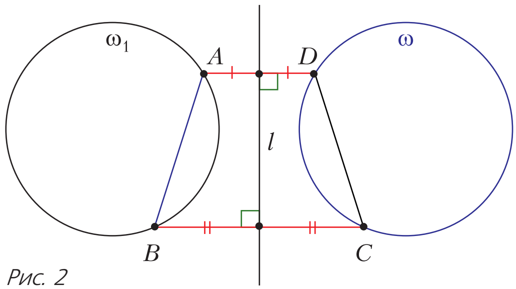



*Рис. 2*

Сначала построим окружность $\omega_1$, равную $\omega$ и проходящую через $A$ и $B$ (это можно сделать с помощью построения треугольника по трем сторонам – отрезку $AB$ и двум радиусам; в общем случае есть две подходящие окружности). Далее построим ось симметрии $l$ этих окружностей. Отразив от нее точки $A$ и $B$, получим точки $D$ и $C$. Отметим, что этот сюжет развивается в задаче 8–9.5 Устной геометрической олимпиады 2019 года (https://olympiads.mccme.ru/ustn/resh19ge.pdf).

**12.** Можно всегда.

Покажем, как это сделать.

Заметим, что можно поделить все числа на их общий делитель $m$. Тогда результаты всех дальнейших действий станут в $m$ раз меньше, чем были бы без этого деления.

Умножением чисел на 2 добьемся того, чтобы двойка входила в разложения на простые множители чисел в одной и той же степени. Затем поделим все числа на эту степень двойки, все они станут нечетными. Назовем эту операцию *выравниванием*.

*Основой* числа назовем наибольшее нечетное число, на которое оно делится (например, основа числа 180 это 45). При выравнивании каждое из чисел заменяется на свою основу.

Шаг алгоритма заключается в следующем. Сначала проведем выравнивание. Если еще не все числа равны, то найдутся два рядом стоящих числа $a$ и $b$ таких, что $a > b$. Прибавим $b$ к $a$. Число $a+b$ четное, поэтому его основа не больше $\frac{a+b}{2} < a$. Значит, на этом шаге основа одного числа уменьшилась, а у других не изменилась.

Таким образом, на каждом шаге уменьшается сумма основ всех чисел, а этого бесконечно происходить не может. Тем самым, в какой-то момент мы не сможем сделать шаг, а это может произойти только когда все числа равны.

*(см. «Квант» №12 за 2019 г.)*

**13.** Можно.

Табличка (рис.3) является примером. Придумать его помогает следующее наблюдение. Если в двух

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 5 |
| 7 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 7 | 7 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 7 | 7 | 7 | 5 | 5 | 7 | 7 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 5 | 5 | 7 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 5 | 5 |

Рис. 3

строках поровну пятерок, то суммы в них будут одинаковыми, а если не поровну – то разными. Аналогично со столбцами.

**14.** Пусть $M$ – середина $CK$ (рис.4). Отметим точку $D$ на отрезке $AB$ такую, что $BD = AK$. Тогда $DM = KM$ (например, в силу симметрии равнобедренного треугольника $AMB$ относительно серединного перпендикуляра к $AB$). В треугольнике $CKD$ медиана $DM$ в 2 раза меньше стороны, к которой она проведена, значит, он прямоугольный. Тогда $BD < BC$, так как они являются катетом и гипотенузой в прямоугольном треугольнике $BCD$. Итак, $AK = BD < BC$.

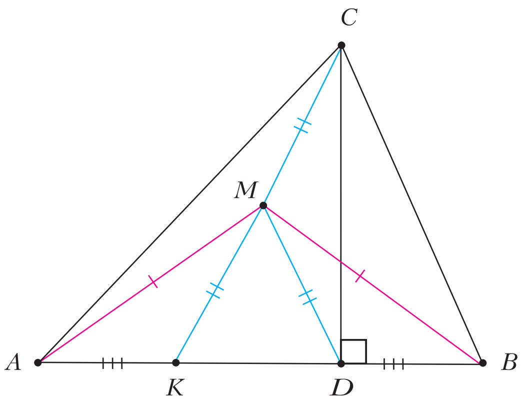



Рис. 4

**15.** 168.

*Пример*. Возьмем палочки 167, 168, …, 332, 333, 334.

Докажем оценку. Пусть две самые маленькие палочки $a$, $b$ ($a < b$), три самые большие $x$, $y$, $z$ ($x < y < z$).

Если $b \le 168$, то из рассмотрения треугольника со сторонами $a$, $b$, $z$ можно сделать вывод, что $z - b < a \le 167$. Количество палочек, длина которых между $b$ и $z$, не превышает $z - b - 1$. Значит, всего палочек не больше $z - b - 1 + 3 \le 166 - 1 + 3 = 168$.

В противном случае $b \ge 169$.

Если $x \ge 333$, то $x + y + z \ge 333 + 334 + 335 = 1002$, т.е. периметр треугольника со сторонами $x, y, z$ слишком большой. Следовательно, $x \le 332$. Количество палочек, длина которых между $b$ и $x$, не превышает $x - b - 1$. Значит, всего палочек не больше $x - b - 1 + 5 \le 332 - 169 - 1 + 5 = 167$.

Итак, в любом случае палочек не больше 168.

**16.** Извлечем из натурального числа $k > 1$ квадратный корень, затем извлечем квадратный корень из результата и так далее, пока не получится нецелое число. Количество таких операций назовем *глубиной* числа $k$.

Пусть Квантик и Ноутик вычислят глубины своих чисел. Они получат натуральные числа, отличающиеся на 1. Если Ноутик узнает, получилась у Квантика глубина большая на 1 или меньшая на 1, то он поймет, какое у Квантика число.

Так как глубины чисел у ребят отличаются на 1, то Ноутик уже знает четность глубины числа Квантика. Если теперь он узнает, какой остаток она дает при делении на 4, то он поймет, какая конкретно у числа Квантика глубина (поскольку два числа, которые могут быть у Квантика, отличаются на 2, то они дают разные остатки при делении на 4). Итак, пусть Квантик покажет белую карточку, если его глубина при делении на 4 дает остатки 0 или 1, а иначе – черную. Тогда Ноутик поймет, какое у Квантика число.

## Непрерывность дискретная и обычная

**9.** *Указание.* Пусть сапоги пронумерованы от 1 до 20. Рассмотрите следующую последовательность: $d_n$ равно полуразности между количеством левых и правых сапог среди сапог с номерами от $n$ до $n+9$. Докажите, что последовательность $d_1, d_2, \ldots, d_{11}$ удовлетворяет условию дискретной теоремы о промежуточном значении.

**10.** *Указание.* Сложите куб $2\times2\times2$ произвольным образом. Если на его поверхности черных и белых квадратиков поровну, то задача решена. В противном случае заметим, что у каждого маленького кубика 3 грани видны, а 3 – нет. И если мы повернем каждый из них так, чтобы невидимые и видимые грани поменялись местами, то разность количеств белых и черных граней сменит знак. Осталось организовать процесс поворота маленьких кубиков так, чтобы на каждом шаге эта разность менялась на 2. Так как она всегда четна, мы обязательно на некотором шаге получим 0 (для полного соответствия формулировке дискретной теоремы о промежуточном значении можно рассмотреть полуразность).

**11.** *Указание.* Разделите квадрат $100\times100$ на четыре квадрата $25\times25$. Если ни один из них не является искомым, покажите, что есть два соседних квадрата, суммы чисел в которых имеют разные знаки. Далее рассмотрим один из этих квадратов и будем смещаться на 1 колонку в направлении второго квадрата.

**12.** а) *Указание.* Рассмотрите угол $AOB$ с вершиной в данной точке $O$, внутри которого полностью лежит многоугольник. Затем примените теорему о промежуточном значении к функции, которая по углу $\angle BOD = \alpha$ (точка $D$ лежит внутри угла $AOB$) задает значение площади той части многоугольника, которая лежит внутри угла $BOD$.

б) Проведите через точку $O$ произвольную прямую и поверните ее на 180°. Примените теорему о промежуточном значении к функции, которая по углу поворота задает разность площадей двух многоугольников, на которые повернутая прямая делит исходный многоугольник.

**13.** *Указание.* Рассмотрите функцию

$$f(x) = \frac{1}{n}\left(|x-x_1| + |x-x_2| + \ldots + |x-x_n|\right)$$

и докажите, что $f(0) + f(1) = 1$.

## Физические аналогии

**1.** Давление газа в положении равновесия есть

$$p_0 = p_{\text{а}} + \frac{mg}{S}.$$

Рассмотрим малое смещение поршня от положения равновесия. Пусть $\Delta V$ – изменение объема газа в этом процессе. Найдем новое давление $p$:

$$p = \frac{RT_0}{V} = \frac{RT_0}{V_0 + \Delta V} = \frac{RT_0(V_0 - \Delta V)}{V_0^2 - (\Delta V)^2} = \frac{RT_0}{V_0}\,\frac{1 - \dfrac{\Delta V}{V_0}}{1 - \left(\dfrac{\Delta V}{V_0}\right)^2}.$$

Заметим, что в числитель отношение $\dfrac{\Delta V}{V_0}$ входит в первой степени, а в знаменатель – во второй. Если $\left(\dfrac{\Delta V}{V_0}\right)^2 \ll 1$, то в знаменателе с хорошим приближением можно пренебречь этой величиной по сравнению с единицей. Тогда

$$p = \frac{RT_0}{V_0}\left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right) = p_0\left(1 - \frac{\Delta V}{V_0}\right).$$

Следовательно, изменение давления $\Delta p$ равно

$$\Delta p = p - p_0 = -\frac{RT_0}{V_0^2}\Delta V = -\frac{p_0^2}{RT_0}Sx.$$

Здесь через $x$ обозначено малое смещение поршня от положения равновесия. Сила, действующая на поршень из-за разности давлений $\Delta p$, есть

$$F = \Delta p S = -\frac{p_0^2 S^2}{RT_0}x.$$

Эта сила является квазиупругой силой. По аналогии с грузом на пружине для периода колебаний $T$ теперь можем записать

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mRT_0}{p_0^2 S^2}} = 2\pi\frac{\sqrt{mRT_0}}{p_{\text{а}}S + mg}.$$

Как следует из решения, условие малости колебаний сводится к неравенству $\left(\dfrac{\Delta V}{V}\right)^2 \ll 1$.

Если это условие не выполнено, сила, действующая на поршень, уже не является квазиупругой и аналогия с грузом на пружине теряется. Таким же свойством обладает, например, математический (и физический) маятник.

**2.** Электрическая цепь, состоящая из конденсатора и сопротивления, представляет собой предельный случай электрического колебательного контура, в котором индуктивность пренебрежимо мала. Аналогичная механическая система – тело пренебрежимо малой массы, прикрепленное к пружине упругостью $k$ и находящееся под действием сил вязкого трения с коэффициентом $\beta$. Уравнения движения таких систем одинаковы. Закон Ома для электрической цепи:

$$R\frac{\Delta q}{\Delta t} + \frac{q}{C} = 0, \text{ где } \frac{\Delta q}{\Delta t} = i \text{ – ток в цепи.}$$

Второй закон Ньютона для механической системы:

$$\beta\frac{\Delta x}{\Delta t} + kx = 0, \text{ где } \frac{\Delta x}{\Delta t} = v \text{ – скорость тела.}$$

Системы являются динамически аналогичными:

$$q \leftrightarrow x\,; \quad \frac{1}{RC} \leftrightarrow \frac{k}{\beta}.$$

Интересно отметить, что можно придумать и другие аналогии. Рассмотрим, например, горизонтальное движение шарика массой $m$, обладающего некоторой начальной скоростью, в вязкой жидкости с коэффициентом вязкости $\beta$. Второй закон Ньютона для шарика запишется в виде

$$ma = -\beta v, \text{ или } m\frac{\Delta v}{\Delta t} + \beta v = 0.$$

Мы пришли к уравнению того же вида, что и предыдущие. Эта система также динамически аналогична электрической цепи, состоящей из $R$ и $C$, только теперь

$$q \leftrightarrow v; \quad \frac{1}{RC} \leftrightarrow \frac{\beta}{m}.$$

## Муниципальный этап LIV Всероссийской олимпиады школьников по физике

### 9 КЛАСС

**1.** Силы, действующие на систему, показаны на рисунке 5. Записав условия равновесия для каждого из тел, получим

$$V_б = \frac{2m}{\rho}, \quad V_р = \frac{3m}{\rho}.$$

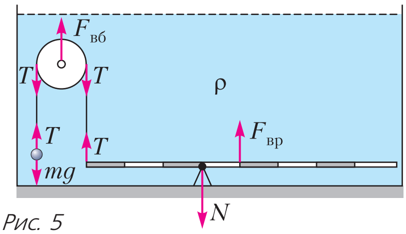


*Рис. 5*

**2.** Мощность, выделяющаяся в проволоке, теряется через ее поверхность пропорционально площади поверхности и разности температур проволоки и окружающей среды. Отсюда находим

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

**3.** $I_A = \frac{U_0}{7R} = 0{,}4$ мА; $U_V = \frac{3}{8}U_0 = 2{,}1$ В.

**4.** См. рис.6.

**5.** $v_0 = \frac{g\tau}{2} = 10$ м/с (в первом случае удара мяча о потолок не было); $h = \frac{g\tau^2}{2} = 10$ м.

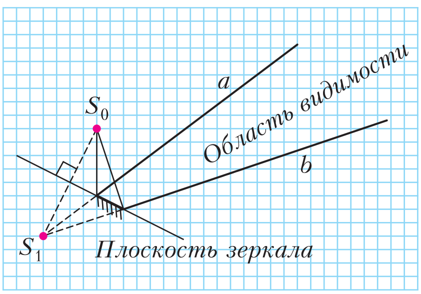


*Рис. 6*

### 10 КЛАСС

**1.** $R = 0{,}5$ кОм, если во фрагмент разветвленной цепи ток втекает через миллиамперметр $A_1$ и вытекает через вольтметр $V_3$; $R = 1{,}5$ кОм, если ток втекает через миллиамперметр $A_1$ и вольтметр $V_3$ и вытекает через вольтметр $V_2$, миллиамперметр $A_2$ и резистор $R$.

**2.** Максимальное ускорение $a_{max} = 0{,}22$ м/с$^2$ достигается на участке от 20 до 30 с, а максимальная скорость $v_{max} = 5$ м/с достигается в момент времени 50 с.

**3.** $t = 4$ с, $L \approx 70$ м (постройте по экспериментальным данным график зависимости мощности от времени).

**4.** Записав условия равновесия для грузов, блоков и рычага (рис.7), найдем

$$V_{б1} = \frac{2m}{\rho}, \quad V_{б2} = \frac{4m}{\rho}, \quad V_р = \frac{m}{\rho}.$$

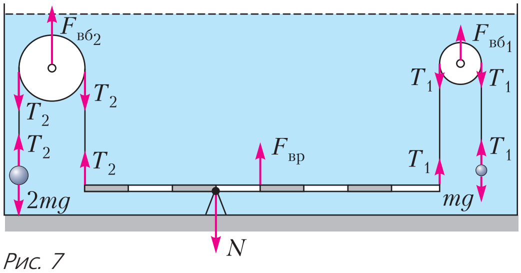


*Рис. 7*

**5.** $v_3 = \frac{4}{3}v_0$, $\Delta L = v_0\sqrt{\frac{2m}{9k}}$ (воспользуйтесь законами сохранения импульса и энергии).

### 11 КЛАСС

**1.** Сразу после щелчка нерастяжимая нить обеспечит равенство проекций скоростей шариков на направление вдоль нити. А так как на нижний шарик действовала только сила натяжения, то у него будет только эта продольная компонента скорости:

$$v_{20} = v_0 \cos\alpha.$$

Через малый промежуток времени верхний шарик упруго отразится от стенки, и знак у продольной составляющей скорости поменяется. Дальше оба шарика полетят равномерно до следующего удара о стенку или натяжения нити. Введем систему координат и запишем уравнения движения шариков:

$$y_2 = v_0\cos\alpha \cdot t, \quad y_1 = l - v_0\cos\alpha \cdot t,$$
$$x_1 = v_0 \sin\alpha \cdot t.$$

Раньше наступит момент натяжения (это легко показать), значит, расстояние будет больше $l$. В интересующий нас момент $t_1$ расстояние между шариками опять станет $l$:

$$l^2 = (l - 2v_0\cos\alpha \cdot t_1)^2 + (v_0 \sin\alpha \cdot t_1)^2,$$

откуда находим

$$t_1 = \frac{4l\cos\alpha}{v_0\left(1+3\cos^2\alpha\right)}.$$

На систему из двух шариков действуют внешние силы (от стенок), обладающие только $y$-компонентами. Значит, центр масс системы движется равномерно вдоль оси $x$ со скоростью $v_{цм} = 0,5v_0\sin\alpha$. Считая, что шарики достигнут края почти одновременно ($L \gg l$), найдем время $t_2$:

$$t_2 = \frac{L}{v_{цм}} = \frac{2L}{v_0\sin\alpha}.$$

**2.** Так как при движении вверх кольцо удерживают и трение в системе отсутствует, система бусинки–пружина сохраняет энергию. Скорость бусинок равна нулю в начальный момент времени и в момент наибольшего удаления от стенки. Значит, в эти моменты деформация пружины одинакова (по модулю). Длина пружины в недеформированном состоянии будет равна среднему арифметическому длин пружин в эти моменты:

$$l = \frac{2R+1,6R}{2} = 1,8R.$$

Максимальная скорость у бусинок будет в тот момент, когда пружина нерастянута. Запишем закон сохранения энергии для начального момента и момента с отсутствием деформации:

$\dfrac{k(2R-l)^2}{2} = 2\dfrac{mv^2}{2}$, откуда находим

$$v = \sqrt{\frac{k(2R-l)^2}{2m}} = 0,2R\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

Когда началось движение бусинок к стенке, кольцо отпустили, значит, на систему кольцо–бусинки–пружина больше не действуют внешние силы. В таком случае центр масс системы будет неподвижен и будет находиться на расстоянии $H_{цм} = 1,3R$ от стенки. Когда бусинки опять окажутся на диаметре, центр масс системы окажется в середине кольца, а бусинки будут находиться от стенки на расстоянии

$$H_1 = H_{цм} = 1,3R.$$

**3.** В состоянии механического равновесия сила давления газа на поршень равна силе упругости пружины (для каждого поршня). Значит, деформация более жесткой пружины всегда в 2 раза меньше деформации менее жесткой: $\Delta x_k = 2\Delta x_{2k}$. После закачивания газа его параметры $(p_0, V_0, T_0)$ описываются уравнениями

$$Sp_0 = 2k\Delta x, \quad V_0 = Sl_0, \quad p_0V_0 = \nu RT_0,$$

где $\Delta x$ – деформация пружины жесткостью $2k$, $S$ – площадь поршней, $\nu$ – количество газа. Так как полная деформация пружин равна $\Delta x + 2\Delta x = l_0$, то $\Delta x = \dfrac{l_0}{3}$. После увеличения температуры в 2 раза параметры газа $(p, V, T)$ будут описываться уравнениями

$$Sp = 2k\left(\frac{l_0}{3}+\frac{\Delta l}{3}\right), \quad V = S(l_0+\Delta l), \quad pV = 2\nu RT_0,$$

где $\Delta l$ – изменение расстояния между поршнями. Подставим выражения давлений и объемов в равенство $pV = 2p_0V_0$ и получим квадратное уравнение для $\Delta l$:

$$\frac{2}{3}\Delta l^2 + \frac{4}{3}l_0\Delta l - \frac{2}{3}l_0^2 = 0.$$

Его решением являются 2 корня $\Delta l = l_0\left(-1\pm\sqrt{2}\right)$, из которых нас интересует только положительный. С учетом того, что $\Delta l$ – это суммарное смещение поршней, а сами смещения связаны соотношением $\Delta x_k = 2\Delta x_{2k}$, получим

$$\Delta x_k = \frac{2l_0\left(\sqrt{2}-1\right)}{3} \approx 1,66 \text{ см},$$

$$\Delta x_{2k} = \frac{l_0\left(\sqrt{2}-1\right)}{3} \approx 0,83 \text{ см}.$$

**4.** Бусинка будет увеличивать скорость до тех пор, пока не окажется в верхней точке кольца, поскольку касательная к траектории проекция сил будет равна нулю, а потенциальная энергия взаимодействия зарядов минимальна. Рассмотрим промежуточное положение бусинки, как показано на рисунке 8. Энергия системы сохраняется, значит,

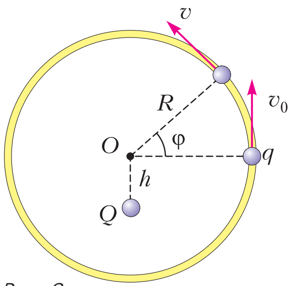



Рис. 8

$$\frac{kqQ}{\sqrt{R^2+h^2}} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kqQ}{\sqrt{R^2+h^2+2Rh\sin\varphi}} + \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2kqQ}{m}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2+2Rh\sin\varphi}}\right)}.$$

Максимальное значение скорости будет при $\varphi = 90°$:

$$v_{max} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2kqQ}{m}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} - \frac{1}{R+h}\right)}.$$

По третьему закону Ньютона сила нормальной реакции со стороны кольца равна по модулю искомой силе давления бусинки на кольцо:

$$N = \frac{mv_{\max}^2}{R} + \frac{kqQ}{(R+h)^2}.$$

Потенциальная энергия взаимодействия двух одноименных зарядов максимальна при минимальном расстоянии между ними, т.е. в нижней точке кольца. Начальной кинетической энергии должно хватить хотя бы для того, чтобы бусинка достигла нижней точке и находилась в неустойчивом равновесии, т.е. скорость бусинки должна быть в нижней точке равна нулю. Тогда можно записать равенство энергий

$$\frac{kqQ}{\sqrt{R^2+h^2}} + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{kQq}{R-h},$$

откуда найдем искомую начальную скорость:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2kqQ}{m}\left(\frac{1}{R-h} - \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)}.$$

**5.** Скорости частицы много меньше скорости света в вакууме, поэтому можно пользоваться законами классической механики. Масса и заряд инвариантны к смене систем отсчета. Так как мы переходим из одной инерциальной системы в другую, то ускорение в ней будет тем же: $\vec{a}' = \vec{a}$. В исходной системе это ускорение сообщает сила Лоренца, равная $F = qvB$. Тогда величина ускорения будет

$$a' = \frac{F}{m} = 0{,}15 \text{ м/с}^2.$$

Направления силы и ускорения определяются правилом левой руки. С учетом положительного знака заряда частицы – в плоскости рисунка перпендикулярно скорости вверх.

В новой системе отсчета частица в начальный момент неподвижна. Поэтому магнитная составляющая поля на нее не действует, но теперь появляется сила со стороны электрической компоненты. Сила, действующая на частицу в новой системе отсчета, равна $F' = ma'$. Тогда модуль напряженности равен

$$E' = \frac{F'}{q} = vB = 0{,}1 \text{ В/м},$$

а ее направление совпадет с направлением ускорения.

## XXVI Международная олимпиада «Туймаада»

### Физика

**1.** Сила трения скольжения пропорциональна доле линейки, находящейся на шероховатой части. Пусть $x$ – смещение переднего конца линейки за границу между полуплоскостями, тогда сила трения равна

$$F = \mu mg\frac{x}{L}, \text{ если } x \le L, \text{ и } F = \mu mg, \text{ если } x \ge L.$$

Искомый максимум будет на промежутке $0 < x \le L$, так как при $x \le 0$ трения еще нет, а при $x > L$ мощность силы трения будет меньше, чем при $x = L$ (при $x \ge L$ сила трения уже не растет, а скорость только уменьшается), поэтому случай $x > L$ можно не рассматривать.

Запишем второй закон Ньютона:

$$ma = -\mu mg\frac{x}{L}, \text{ или } a + \frac{\mu g}{L}x = 0.$$

Эти уравнения совпадают с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\mu g/L}$. Конечно, никаких колебаний линейка совершать не будет, однако закон ее движения на рассматриваемом промежутке будет таким же, как у пружинного маятника, выведенного толчком из положения равновесия.

Используя начальные значения координаты $x(0) = 0$ и скорости $v(0) = v_0$, запишем зависимости этих величин от времени:

$$x(t) = x_0 \sin\omega t, \quad v(t) = v_0\cos\omega t,$$

причем

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{L}{\mu g}}.$$

Модуль мощности силы трения после упрощения имеет вид

$$N = Fv = \frac{mv_0^2}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{L}}\sin 2\omega t.$$

Эти формулы справедливы до тех пор, пока не произойдет одно из двух событий: либо остановка линейки до полного пересечения ею границы между полуплоскостями, либо полное пересечение линейкой этой границы.

В первом случае, возникающем при условии $x_0 \le L$, что равносильно условию $v_0 \le \sqrt{\mu gL}$, начальное и конечное значения мощности равны нулю, а максимум мощности наблюдается, когда $\sin 2\omega t = 1$. Отсюда находим

$$N_{\max} = \frac{mv_0^2}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{L}}, \quad t_{\max} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{L}{\mu g}}.$$

Во втором случае, возникающем при условии $x_0 \ge L$, что равносильно условию $v_0 \ge \sqrt{\mu gL}$, линейка полностью покинет гладкую полуплоскость в момент времени

$$t_{\text{гран}} = \sqrt{\frac{L}{\mu g}}\arcsin\frac{\sqrt{\mu gL}}{v_0},$$

имея при этом скорость

$$v_{\text{гран}} = \sqrt{v_0^2 - \mu gL}.$$

При условии $t_{\text{гран}} \ge t_{\max}$, что равносильно условию $v_0 \le \sqrt{2\mu gL}$, максимум мощности будет точно такой же, как и в первом случае, причем условие $v_0 \le \sqrt{\mu gL}$ из первого случая полностью поглощается новым условием. При обратном условии $t_{\text{гран}} \le t_{\max}$ прежний максимум мощности не успеет реализоваться до полного перехода линейкой границы между полуплоскостями, значит, максимум будет в момент $t_{\text{гран}}$:

$$N_{\max} = \mu mg v_{\text{гран}} = \mu mg\sqrt{v_0^2 - \mu gL}.$$

Таким образом, окончательный ответ имеет следующий вид:

$$N_{\max} = \frac{mv_0^2}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{L}} \quad \text{и} \quad t_{\max} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{L}{\mu g}},$$

если $v_0 \le \sqrt{2\mu gL}$;

$$N_{\max} = \mu mg\sqrt{v_0^2 - \mu gL} \quad \text{и} \quad t_{\max} = \sqrt{\frac{L}{\mu g}}\arcsin\frac{\sqrt{\mu gL}}{v_0}$$

в противоположном случае.

**2.** Искомую общую теплоемкость будем искать по определению: как отношение подведенного количества теплоты $\delta Q$ к изменению температуры $dT$. Пусть $V$ – объем пара, тогда из уравнения Менделеева–Клапейрона

$$\mathrm{M}pV = mRT,$$

где $\mathrm{M} = 18$ кг/кмоль – молярная масса воды, $R = 8314$ Дж/(кмоль · К) – универсальная газовая постоянная. После дифференцирования приходим к соотношению

$$\mathrm{M}Vdp = RmdT + RTdm.$$

Подставляя сюда $dp = \alpha p dT/T$ из условия, получаем уравнение

$$\mathrm{M}V\alpha p\frac{dT}{T} = RmdT + RTdm,$$

откуда после повторного использования уравнения Менделеева–Клапейрона выражаем приращение массы пара:

$$dm = m(\alpha - 1)\frac{dT}{T}.$$

Поскольку сосуд жесткий, объем не меняется и работа не совершается, поэтому все подведенное количество теплоты идет на увеличение внутренней энергии (нагревание воды и пара и испарение воды):

$$\delta Q = cm_0 dT + 3\frac{m}{\mathrm{M}}RdT + \lambda dm.$$

После подстановки выражения для $dm$ получаем ответ:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = cm_0 + \frac{3mR}{\mathrm{M}} + \frac{\lambda m(\alpha - 1)}{T} = 800 \text{ Дж/К}.$$

**3.** На рисунке 9 точка $P$ является точкой пересечения рассматриваемой силовой линии и отрезка $BD$. Применим теорему Гаусса для замкнутой поверхности, образованной силовыми линиями, исходящими из точки $P$, и плоскостью, проходящей через точку $A$ перпендикулярно $BD$. Внутрь этой поверхности попал заряд $q = Qx/L$, где $Q$ – заряд отрезка. Поток вектора напряженности

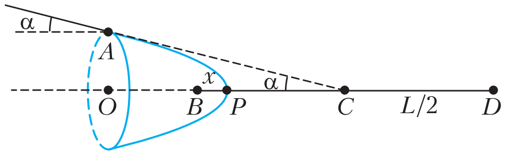


Рис. 9

через поверхность, образованную силовыми линиями, всегда равен нулю, так как поле в каждой точке параллельно этой поверхности. Поскольку точка $A$ расположена на большом расстоянии от отрезка, можно считать, что поле вблизи этой точки совпадает с полем точечного заряда, находящегося в середине отрезка, т.е. продолжение вектора напряженности проходит через середину $C$ отрезка, а в силу малости угла $\alpha$ можно полагать равенство

$$E_\perp = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 AC^2}$$

верным во всех точках круга с центром $O$ и радиусом $OA$. Отсюда находим поток через рассматриваемую поверхность:

$$\Phi = E_\perp \pi OA^2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 AC^2}\pi(\alpha AC)^2 = \frac{Q\alpha^2}{4\varepsilon_0}.$$

Теорема Гаусса имеет вид

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда после подстановки выражений для $\Phi$ и $q$ получаем ответ:

$$x = \frac{\alpha^2 L}{4}.$$

**4.** Пусть $b$ – расстояние от объектива до пленки, тогда по формуле тонкой линзы можно написать

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

Если изображение точечного предмета оказывается на небольшом расстоянии $x$ перед пленкой или за ней, то на пленке будет засвечено пятнышко, размер которого не должен превышать $d$, чтобы изображение считалось достаточно резким. Из подобия треугольников, образованных граничными лучами, прошедшими через объектив, с использованием приближения $d \ll D$ находим максимально допустимое смещение изображения из плоскости пленки:

$$x = \frac{bd}{D}.$$

Формулы тонкой линзы для предельно смещенных предметов имеют вид

$$\frac{1}{a_{\min}} + \frac{1}{b + x} = \frac{1}{F},$$

$$\frac{1}{a_{\max}} + \frac{1}{b - x} = \frac{1}{F}.$$

Решая все записанные уравнения совместно, находим ответ:

$$a_{\min} = \frac{a}{1 + k}, \quad a_{\max} = \frac{a}{1 - k}, \quad \text{где} \quad k = \frac{ad}{FD}.$$

При $k \geq 1$ значение $a_{max}$ будет не определено или отрицательно, что противоречит физическому смыслу и означает, что верхней границы для значений $a$ просто нет, т.е. предметы на сколь угодно большом расстоянии будут изображены резко.

Подставляя численные данные, получаем ответы для частных случаев:

$$k_1 = 0{,}6,\ \ a_{min} = 7{,}5\text{ м},\ \ a_{max} = 30\text{ м};$$

$$k_2 = 3,\ \ a_{min} = 15\text{ м},\ \ a_{max} = \infty.$$

**5.** Пусть цилиндр повернут на малый угол $\varphi$ относительно положения равновесия (на рисунке 10 показан вид сверху). При отражении фото-

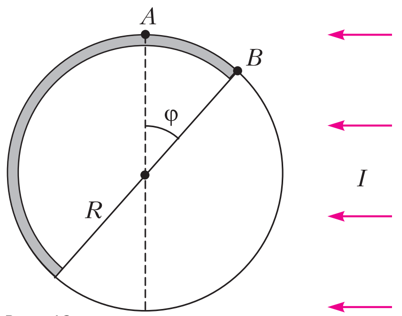



Рис. 10

нов их импульс в проекции на касательную к сечению цилиндра сохраняется, поэтому вращающего момента не возникает, а при поглощении фотонов их импульс в проекции на касательную к сечению цилиндра передается цилиндру, создавая вращающий момент $M$.

В условиях $\varphi \ll 1$ можно считать, что импульс фотонов, поглощенных участком поверхности $AB$, направлен целиком по касательной и имеет плечо $R$ относительно оси вращения цилиндра. Пусть $L$ – высота цилиндра, тогда площадь проекции поглощающей поверхности на плоскость, перпендикулярную световому потоку, имеет вид

$$S = LR(1 - \cos\varphi) \approx \frac{LR\varphi^2}{2}.$$

Вращающий момент $M$ вычислим через силу давления $F$, импульс $p$ и энергию $E$ потока фотонов:

$$M = FR = p'R = \frac{E'}{c}R = \frac{IS}{c}R = \frac{ILR^2\varphi^2}{2c}.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения для цилиндра массой $m = 2\pi RL\sigma$ и моментом инерции $J = mR^2$ имеет вид

$$J\varphi'' = M.$$

Отсюда после подстановки с учетом направления момента получаем уравнение

$$2\pi RL\sigma R^2 \cdot \varphi'' = -\frac{ILR^2}{2c} \cdot |\varphi| \cdot \varphi,$$

которое осталось лишь записать в приведенном виде:

$$\varphi'' + \frac{I}{4\pi c\sigma R} \cdot |\varphi| \cdot \varphi = 0.$$

Полученное равенство похоже на уравнение гармонических колебаний, но все же им не является. Решать такое нелинейное дифференциальное уравнение аналитически мы не умеем, поэтому воспользуемся тем, что по условию достаточно лишь оценить период. Будем считать, что колебания будут почти гармоническими, тогда можно заменить $|\varphi|$ на какое-нибудь среднее значение, например среднеквадратичное, которое в случае гармонических колебаний в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитуды $\varphi_0$. После замены получим уравнение

$$\varphi'' + \frac{I}{4\pi c\sigma R}\frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}\varphi = 0,$$

решением которого являются колебания с искомым периодом:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{I}{4\pi c\sigma R}\dfrac{\varphi_0}{\sqrt{2}}}} = 4\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi c\sigma R}{I\varphi_0}} = 3746\text{ с} \approx 1\text{ ч}.$$


# КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**
**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**
**Тел.: +7 916 168-64-74**
**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»**
**Телефон: +7 495 363-48-86,**
**htpp: //capitalpress.ru**

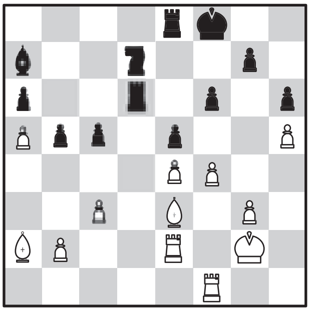
# ГоД ЧЕМПИОНА

Шахматный 2019 год прошел под знаком полного превосходства Магнуса Карлсена. Действующий чемпион мира установил рекорд, сыграв 107 партий в классические шахматы без поражений, выиграл ряд супертурниров, а в конце года завоевал титулы чемпиона мира по рапиду и блицу. Сегодняшний выпуск мы целиком посвятим чемпиону.

**М.Карлсен – А.Грищук**

**Шамкир, 2019**

**1. e4 e5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♗b5 ♞f6 4. d3 ♝c5 5. c3 0-0 6. 0-0 d6 7. ♗a4 ♞e7 8. ♗c2 ♞g6 9. d4 ♝b6 10. a4 c6 11. de ♞e5 12. ♘e5 de 13. ♕d8 ♜d8 14. a5 ♝c5.** Первая маленькая неточность, дающая белым возможность «прицелиться» к слону, точнее 14… ♝c7 15. ♗e3 ♝e6 16. f3 b6. **15. ♘d2 ♝e6 16. ♖e1 b5 17. ♘b3 ♝b3 18. ♗b3 ♞g4.** Выпад коня оказывается потерей времени, поэтому стоило сразу поискать контригру на ферзевом фланге после 18… ♜ab8. **19. ♖e2 ♜d6 20. ♗g5 ♚f8** (20…h6? 21. ♗e7) **21. ♖f1! ♞f6 22. g3 a6 23. ♔g2 ♞d7** (сильнее 23… ♜ad8 24. ♗c1 ♜6d7!? 25. f4 ♝d6, избегая ослабления белых полей) **24. ♗c1 ♝a7 25. f4 f6 26. h4 ♜e8 27. h5 h6 28. ♗a2 c5 29. ♗e3.**

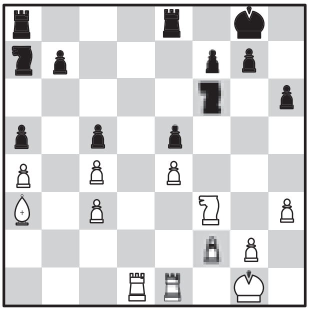


**29… ef 30. gf ♜e4 31. ♗b1 ♜e7 32. ♖fe1 f5?** Ошибка в цейтноте: возвращая пешку, черные не улучшают позицию. Необходимо было 32… ♞b8, чтобы перевести коня через поле c6 на e7 для защиты вертикали e. **33. ♗f5 ♞f6 34. ♔f3 ♞d5** (34…♞h5 35. ♗c5!) **35. ♖d2 ♜d8 36. ♗e4 ♜ed7 37. ♖ed1 ♞f6 38. ♖d7 ♞d7 39. ♖d6**, и ввиду потери пешки на а6 **черные сдались**.

**М. Карлсен – У. Со**

**Сент-Луис, 2019**

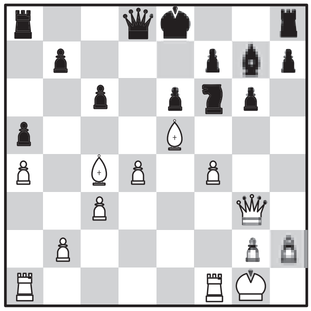
**1. e4 e5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♗c4 ♝c5 4. 0-0 ♞f6 5. d3 0-0 6. c3 d6 7. h3 h6 8. ♖e1 a6 9. a4 a5 10. ♘bd2 ♝e6 11. ♗b5 ♞a7 12. d4 ♞b5 13. dc ♞a7 14. b3 ♜e8 15. cd ♛d6 16. ♗a3 c5 17. ♘c4 ♛d1 18. ♖ad1 ♝c4 19. bc.**



В послематчевом разборе М.Карлсен отметил, что руководствовался идеями М.Ботвинника, который умело использовал преимущества сдвоенных пешек в своих партиях. **19…b6** (сильнее 19…♜ac8 или 19…♞c8 20. ♗c5 ♜a6 с контригрой в обоих вариантах) **20. ♘h4 ♜ad8 21. f3 g6 22. g3 ♞h5 23. ♔f2 ♞c6 24. ♗c1 ♚g7 25. ♗e3 ♜d1 26. ♖d1 ♜d8 27. ♖b1 ♜b8 28. ♘g2 ♞f6 29. ♔e2 ♞e8** (предпочтительнее 29…h5, стремясь к размену пешек) **30. ♗f2 ♞d6 31. ♘e3 ♞e7 32. ♘d5 ♞d5 33. cd ♜b7 34. ♔d3** (сильнее сразу 34. c4) **34…f5 35. c4 fe+.** Пассивная оборона могла привести черных к полному цугцвангу, в разборе после партии Магнус показал примерный вариант: 35…f4 36. g4 ♚f7 37. ♗e1 ♚g7 38. ♗c3 ♚f6 39. ♖b2 g5 40. ♖b1, и у черных больше нет хороших ходов. **36. fe ♜f7 37. ♖b6 ♜f2 38. ♖d6 ♜f3+ 39. ♔e2.** Неточность, сильнее ♔d2, не допуская следующий ход черных. **39…♜c3 40. ♖e6 ♜c4 41. ♖e5 ♜a4 42. ♖e7+ ♚f6?** Ответная и решающая ошибка, необходимо было отойти королем назад: 42… ♚f8. **43. d6.** Теперь на 43…♜d4 последует 44. e5+, отталкивая короля, и, будучи не в силах остановить проходные пешки соперника, **черные остановили часы**.

**М. Карлсен – А. Утегалиев**

**Москва, 2019**



К такой позиции пришла партия первого тура чемпионата мира по быстрым шахматам, и М.Карлсен убедительно продемонстрировал, почему скандинавская защита – редкий гость в партиях элитных гроссмейстеров. **19. f5.** Позиционная жертва пешки подчеркивает преимущество белых в развитии. **19…ef 20. ♗c7 ♛c8.** Упорнее 20…♞e4 21. ♖ae1 ♛e7 22. ♖e4 fe 23. ♖f7 ♛f7 24. ♗f7 ♚f7 – у черных две ладьи за ферзя, но благодаря активности фигур белые все равно должны победить; теперь же белые выигрывают форсированно. **21. ♕d6 ♞e4 22. ♖ae1 ♛d7 23. ♖e4+ fe 24. ♗f7+ ♛f7 25. ♖f7 ♚f7 26. ♕d7+**, и мат неизбежен, поэтому **черные сдались**.

*А.Русанов*

Индекс 90964

# Прогулки с физикой

## К вопросу о бифуркации

Где можно встретить это явление в жизни, природе, науке?


(Подробнее – на с. 29 внутри журнала)

ISSN 0130-2221 20002
9 770130 222207